

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Σύμφωνα με το αξίωμα της κανονικοποίησης, θα πρέπει το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχόμενων μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής να ισούται με 1, δηλαδή:

$$1 = \sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{c}(2 + 1 + 0 + 1 + 2) = \frac{6}{c}$$
$$\Rightarrow c = 6$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot p_X(x) = \sum_{x=-2}^2 x \frac{|x|}{6} \\ &= \frac{1}{6}[-2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Γενικά, κάθε τυχαία μεταβλητή X με άρτια ΣΠΠ πρέπει να έχει $E[X] = 0$.

Σημείωση: μια συνάρτηση λέγεται άρτια αν $f(x) = f(-x)$, δηλαδή είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα των y .

(γ) Αφού $E[X] = 0$, έχουμε $Z = X^2$. Συνεπώς:

$$p_Z(z) = P(\{Z = z\}) = P(\{X^2 = z\}).$$

Εφόσον το X μπορεί να πάρει τις τιμές $\pm 1, \pm 2$ (με μη-αρνητική πιθανότητα), η τ.μ. $Z = X^2$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 1, 4.

Άρα

$$p_Z(z) = P(\{X^2 = z\}) = p_X(-\sqrt{z}) + p_X(\sqrt{z}) = \frac{|-\sqrt{z}|}{6} + \frac{|\sqrt{z}|}{6} = \frac{\sqrt{z}}{3}, \quad \text{για } z = 1, 4$$

(δ) Η διασπορά μιας τ.μ. X δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} var(X) &= E\{(X - E[X])^2\} = E[Z] \\ &= \sum_{z=1,4} z \cdot p_Z(z) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{4}}{3} + 1 \cdot \frac{\sqrt{1}}{3} = 3. \end{aligned}$$

(ε') Θα πρέπει να προσθέσουμε το άθροισμα των x με μη-μηδενική πιθανότητα :

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{x=\pm 2, \pm 1} (x - E[X])^2 p_X(x) = (-2)^2 p_X(-2) + (-1)^2 p_X(-1) + 1^2 p_X(1) + 2^2 p_X(2) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{8 + 1 + 1 + 8}{6} = 3. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

(α') Το πακέτο επιστρέφεται αν περισσότερα από 1 CD's βρεθούν ελαττωματικά. Κάθε πακέτο περιέχει 10 ανεξάρτητα CD's, έστω $n = 10$. Η πιθανότητα ένα CD να είναι ελαττωματικό είναι σταθερή και ίση με $p = 0.01$. Αφού η πιθανότητα p είναι μικρή, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή *Poisson*, όμως εδώ το πρόβλημα δε μας ζητάει προσέγγιση άρα χρησιμοποιούμε τη Διωνυμική κατανομή.

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{10}{1} (0.01)^1 (0.99)^9 - \binom{10}{0} (0.01)^0 (0.99)^{10} \\ &= 0.0043 \end{aligned}$$

Αν επιλέγαμε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή *Poisson* θα έπρεπε να πάρουμε

$$\lambda = n \cdot p = 10 \cdot 0.01 = 0.1$$

και

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-0.1} (0.1)^1}{1!} - \frac{e^{-0.1} (0.1)^0}{0!} \\ &= 1 - 1.1 e^{-0.1} \\ &= 0.0047 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η Poisson προσεγγίζει με αρκετά μεγάλη ακρίβεια (4ου δεκαδικού ψηφίου) τη Διωνυμική.

(β') Έχουμε $n = 3$ ανεξάρτητα πακέτα. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα επιστροφής ενός πακέτου είναι ίση με 0.0043. Αυτή είναι η πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.0043$ και είναι σταθερή. Ορίζουμε την τ.μ. X , η οποία εκφράζει τον αριθμό των πακέτων (από το σύνολο των 3), που επιστρέφουμε. Ζητείται λοιπόν η $P(X = 1)$.

Σύμφωνα με το μοντέλο της Διωνυμικής κατανομής θα έχουμε:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} (0.0043)^1 (0.9957)^2 = 0.0128$$

Άσκηση 3.

Έστω X η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των ρίψεων ως την πρώτη κορώνα. Η X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παραμετρο $p = 0.5$ και ΣΠΠ:

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Το κέρδος είναι $Y = 2^k$ και έχει την ίδια ΣΠΠ με την X .

Έτσι,

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} y p_Y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Εσείς πόσα χρήματα θα επενδύατε για ένα παιχνίδι με άπειρο αναμενόμενο κέρδος;

Άσκηση 4.

(α) Πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x, y) = 1$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 c(x+y) = c \left(\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 x + \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^2 y \right) \\ &= c \left(3 \sum_{x=1}^2 x + 2 \sum_{y=1}^3 y \right) = c(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) = 21c \end{aligned}$$

Άρα, $c = \frac{1}{21}$

(β')

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y=1}^3 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^3 (x+y) = \frac{3x+6}{21}, \quad x = 1, 2 \\ p_Y(y) &= \sum_{x=1}^2 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{x=1}^2 y(x+y) = \frac{3+2y}{21}, \quad y = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

(γ') Έχουμε

$$\begin{aligned} p(1, 1) &= \frac{1+1}{21} = \frac{2}{21} \\ p_X(1) \cdot p_Y(1) &= \frac{9}{21} \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{49} \end{aligned}$$

Άρα $p(x, y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$ και έτσι οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 5.

Αν η τ.μ. X εκφράζει τη θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, τότε η θερμοκρασία σε Φαρενάιτ θα εκφράζεται από την $Y = 32 + \frac{9}{5}X$.

Άρα

$$E[Y] = 32 + \frac{9}{5}E[X] = 32 + 18 = 50.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= \left(\frac{9}{5}\right)^2 \text{var}(X) = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \sigma_X^2 = \left(\frac{9}{5}10\right)^2 \\ \Rightarrow \sigma_Y &= \sqrt{\text{var}(Y)} = \frac{9}{5}10 = 18 \end{aligned}$$

Συνεπώς μία τυπική ημέρα σε Φάρενάιτ είναι αυτή για την οποία η θερμοκρασία θα βρίσκεται στο πεδίο τιμών $[32, 68]$.

Άσκηση 6.

Έστω n ο ζητούμενος αριθμός παιδιών που πρέπει να αποκτήσει η οικογένεια. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των αγοριών που έχει αποκτήσει η οικογένεια στο σύνολο των n παιδιών και Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των κοριτσιών που έχει αποκτήσει η οικογένεια στο σύνολο των n παιδιών.

Ισχύει ότι οι τ.μ. X και Y είναι Διωνυμικές με παραμέτρους $(n, \frac{1}{2})$ και $(n, \frac{1}{2})$ αντίστοιχα. Επιπλέον, $X + Y = n$.

Είναι

$$\begin{aligned} P(X \geq 1, Y \geq 1) &= P(X \geq 1, n - X \geq 1) = P(1 \leq X \leq n - 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = n) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Πρέπει $1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geq 0.9 \Rightarrow n \geq 1 - \frac{\ln(0.1)}{\ln(2)} \approx 4.32$. Επομένως, η οικογένεια θα πρέπει να έχει τουλάχιστον πέντε παιδιά.

Άσκηση 7.

Αφού ο Κώστας πάντα ποντάρει στα νούμερα 1 ως 12, τα οποία καταλαμβάνουν 12 από τις συνολικά 38 διαθέσιμες θέσεις στη ρουλέτα, η πιθανότητα επιτυχίας (νίκης) είναι $p = \frac{12}{38}$.

(α') Τα πρώτα 5 πονταρίσματα σχηματίζουν ένα πεπερασμένο σύνολο από $n = 5$ προσπάθειες. Κάθε γύρισμα της ρουλέτας είναι ανεξάρτητο και η πιθανότητα επιτυχίας p είναι σταθερή. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τη Διωνυμική κατανομή. Ορίζουμε την τ.μ. X ως τον αριθμό των πονταρισμάτων τα οποία κερδίζει ο Κώστας. Τότε:

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{12}{38}\right)^0 \left(\frac{26}{38}\right)^5 = \left(\frac{26}{38}\right)^5 \approx 0.15$$

Θα μπορούσαμε όμως να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα και χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία. Έστω K το γεγονός ότι ο Κώστας κερδίζει το ποντάρισμα. Χρησιμοποιώντας ανεξαρτησία, η πιθανότητα ότι ο Κώστας χάνει τα πρώτα 5 πονταρίσματα θα είναι

$$P(K^c K^c K^c K^c K^c) = \left(\frac{26}{38}\right)^5 \approx 0.15.$$

(β') Υπάρχουν 3 διαφορετικές διατυπώσεις αυτού του προβλήματος

• **1ος τρόπος**

Αρχικά ας αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα διαισθητικά. Το ότι ο Κώστας κερδίζει στο 4ο ποντάρισμα σημαίνει ότι χάνει τα πρώτα 3 πονταρίσματα και κερδίζει το 4ο. Συνεπώς,

$$P(K^c K^c K^c K) = \left(\frac{26}{38}\right) \left(\frac{26}{38}\right) \left(\frac{26}{38}\right) \left(\frac{12}{38}\right) = \left(\frac{26}{38}\right)^3 \left(\frac{12}{38}\right) \approx 0.1012$$

• **2ος τρόπος**

Το πρόβλημα θα μπορούσε επίσης να λυθεί χρησιμοποιώντας Γεωμετρική κατανομή. Έστω η τ.μ. X ο αριθμός των δοκιμών/πονταρισμάτων μέχρι την πρώτη επιτυχία/νίκη. Τότε:

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1} p$$

Επιπλέον,

$$P(X = 4) = \left(\frac{26}{38}\right)^3 \left(\frac{12}{38}\right) \approx 0.1012$$

• **3ος τρόπος**

Αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να ερμηνευθεί και ως "η n -οστή προσπάθεια είναι η r -οστή νίκη". Από αυτή τη σκοπιά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την αρνητική διωνυμική κατανομή. Αλλά αφού εδώ $r = 1$, ερχόμαστε ξανά στην περίπτωση της Γεωμετρικής κατανομής. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την r -οστή επιτυχία, τότε:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots$$

Εδώ, $n = 4, r = 1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{4-1}{1-1} \left(\frac{12}{38}\right)^1 \left(1 - \left(\frac{12}{38}\right)\right)^{4-1} \\ &= \binom{3}{0} \left(\frac{12}{38}\right) \left(\frac{26}{38}\right)^3 \\ &= \left(\frac{12}{38}\right) \left(\frac{26}{38}\right)^3 \\ &= \approx 0.1012 \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

(α') Έστω η τ.μ. X_i , η οποία εκφράζει το κέρδος του κ. Τάδε στο i -οστό παιχνίδι. Σε κάθε παιχνίδι, αν κερδίσει, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{38}$, $X_i = 35$, αλλιώς $X_i = -1$. Άρα η τ.μ. X_i έχει την παρακάτω ΣΠΠ:

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{38}, & x = 35 \\ \frac{37}{38}, & x = -1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της X είναι:

$$E[X] = 35 \cdot \frac{1}{38} - 1 \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38}.$$

Το κέρδος X από τα πρώτα 36 παιχνίδια είναι το άθροισμα των κερδών από κάθε παιχνίδι, $X = \sum_{i=1}^{36} X_i$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^{36} X_i\right] = \sum_{i=1}^{36} E[X_i] \\ &= 36 \cdot \left(-\frac{2}{38}\right) = -\frac{36}{19} \approx -1.8947. \end{aligned}$$

(β') Αν ο κ. Τάδε κέρδιζε 1 φορά και έχανε 35 φορές στα 36 παιχνίδια, το κέρδος του θα ήταν $35 - 1 \cdot 35 = 0$, και δε θα έχανε χρήματα. Αν κέρδιζε περισσότερες από μία φορές, το κέρδος του θα ήταν (σύμφωνα με τα παραπάνω) θετικό. Έτσι ο μόνος τρόπος για να χάνει ο κ. Τάδε χρήματα μετά το 36ο παιχνίδι είναι να χάσει όλα τα παιχνίδια. Αφού τα παιχνίδια είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, η πιθανότητα να χαθούν όλα είναι:

$$p_{\text{χάνει}} = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.38287.$$

(γ') Όταν καταλήγει να χάνει χρήματα που συμβαίνει με πιθανότητα $p_{\text{χάνει}}$, χάνει 20€, αλλιώς κερδίζει 20€ από τον κ. Καλόφιλο. Αν η τ.μ. K εκφράζει το κέρδος του σε αυτό το ποντάρισμα, η ΣΠΠ της K είναι:

$$p_K(k) = \begin{cases} p_{\text{χάνει}}, & k = -20 \\ 1 - p_{\text{χάνει}}, & k = 20 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και η αντίστοιχη μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} E[K] &= -20p_{\text{χάνει}} + 20(1 - p_{\text{χάνει}}) \\ &\approx -20 \cdot 0.38287 + 20 \cdot (1 - 0.38287) \\ &= 4.6852. \end{aligned}$$

(δ') Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε:

$$E[X + K] = E[X] + E[K] \approx -1.8947 + 4.6852 = 2.7905$$

και έτσι ο κ. Τάδε κερδίζει 2.79€ ανά 36 παιχνίδια. Δηλαδή τελικά βγάζει χρήματα από τη ρουλέτα! Από ότι φαίνεται ο κ. Καλόφιλος πρέπει να θεραπευτεί πρώτος...