

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/11/2015

Ημερομηνία Παράδοσης: 13/11/2015

Άσκηση 1.

Έστω η τ.μ. X με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X

(γ') Ορίζουμε τη νέα τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$. Υπολογίστε τη ΣΠΠ $p_Z(z)$ της τ.μ. Z .

(δ') Χρησιμοποιώντας το (γ'), υπολογίστε τη διασπορά $var(X)$ της τ.μ. X .

(ε') Υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X χρησιμοποιώντας τον τύπο: $var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$.

Άσκηση 2.

Μια εταιρεία παράγει CD's. Η πιθανότητα για ένα CD να είναι ελαττωματικό ισούται με 0.1, ανεξαρτήτως CD. Η εταιρεία πουλάει τα CD's σε πακέτα των 10 και παρέχει εγγύηση επιστροφής χρημάτων αν βρεθούν περισσότερα του ενός ελαττωματικά CD's σε κάποιο πακέτο.

(α') Υπολογίστε την πιθανότητα επιστροφής ενός πακέτου.

(β') Αν κάποιος αγοράσει 3 πακέτα, ποια η πιθανότητα ότι θα επιστρέψει ακριβώς ένα από αυτά;

Άσκηση 3.

Το παράδοξο του St. Petersburg: Πετάτε με ανεξάρτητες ρίψεις ένα δίκαιο κέρμα και μετράτε τον αριθμό των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη κορώνα. Αν αυτός ο αριθμός είναι n , κερδίζετε 2^n €. Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος σας; Πόσα θα χρήματα θα ήσασταν διατεθειμένοι να πληρώσετε για να παίξετε αυτό το παιχνίδι;

Άσκηση 4.

Έστω η τ.μ. X με πεδίο τιμών $\{1, 2\}$ και η τ.μ. Y με πεδίο τιμών $\{1, 2, 3\}$. Υποθέστε ότι η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) για τις τ.μ. (X, Y) δίδεται από τη σχέση $p(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α') Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β') Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x)$ $p_Y(y)$.

(γ') Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 5.

Η θερμοκρασία μιας πόλης μοντελοποιείται ως μια τ.μ. με μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίσες με 10 βαθμούς Κελσίου. Μια ημέρα χαρακτηρίζεται ως "τυπική", αν η θερμοκρασία κατά τη διάρκεια αυτής της ημέρας έχει εύρος/πεδίο τιμών μίας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή. Ποιο θα ήταν το εύρος/πεδίο τιμών για μια τυπική μέρα, αν η θερμοκρασία εκφράζονταν σε βαθμούς Φαρενάιτ; (Βοήθεια: Η μετατροπή βαθμών από την κλίμακα Κελσίου στην κλίμακα Φαρενάιτ γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης: $[C^\circ] \times \frac{9}{5} + 32 = [F^\circ]$).

Άσκηση 6.

Πόσα παιδιά πρέπει να αποκτήσει μία οικογένεια ώστε να έχει με πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση του 0.9 τουλάχιστον ένα αγόρι και τουλάχιστον ένα κορίτσι; Υποθέτουμε ότι σε κάθε γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

Άσκηση 7.

Θεωρήστε μια ρουλέτα που αποτελείται από 38 ισοπίθανα νούμερα - 1 ως 36 και δύο φορές το 0. Αν ο Κώστας πάντα ποντάρει στα νούμερα 1 ως 12, ποια η πιθανότητα ότι:

(α') Ο Κώστας θα χάσει το 1ο από τα 5 πονταρίσματα;

(β') Η πρώτη του νίκη θα συμβεί στο 4ο ποντάρισμα;

Άσκηση 8.

Γιατρύνοντας τον μανιώδη τζογαδόρο.

Οι αμερικάνικες ρουλέτες διαθέτουν 38 ισοπίθανα νούμερα. Αν έρθει το νούμερο στο οποίο έχει ποντάρει ένας παίχτης, αυτός παίρνει πίσω το αρχικό ποσό που πόνταρε και επίσης το πληρώνεται άλλες 35 φορές, διαφορετικά το χάνει.

Ο κύριος "Τάδε" πάντα ποντάρει 1€ στο νούμερο 13 της ρουλέτας. Για να βοηθήσει στη θεραπεία του μανιώδη τζογαδόρου μας, ο κ. "Καλόφιλος" πάντα στοιχηματίζει 20€ στον κ. Τάδε, ακόμα και στα χρήματα που ο κ. Τάδε θα χάνει μετά από 36 παιχνίδια. Ο στόχος μας είναι να διαπιστώσουμε πώς δουλεύει η θεραπεία.

(α') Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος του κ. Τάδε, μόνο για τα 36 παιχνίδια στη ρουλέτα, χωρίς το στοιχείο των 20€ του κ. Καλόφιλου. (Αν πρόκειται να χάνει χρήματα, το αναμενόμενο κέρδος θα είναι αρνητικός αριθμός.)

(β') Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο κ. Τάδε θα χάνει χρήματα μετά από 36 παιχνίδια στη ρουλέτα. (Βοήθεια: Μπορεί να χάνει χρήματα αν έχει κερδίσει έστω ένα από τα 36 παιχνίδια.)

(γ') Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος του κ. Τάδε από το στοιχείο του κ. Καλόφιλου.

(δ') Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας για τη μέση τιμή, και τα αποτελέσματα των (α) και (γ), υπολογίστε το συνολικό αναμενόμενο κέρδος του κ. Τάδε από τη ρουλέτα και το στοιχείο. Πώς δουλεύει η θεραπεία;