

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(i) Υποθέτοντας ότι επιτρέπονται επαναλήψεις:

(α) Ο πρώτος φοιτητής μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις n ομάδες. Ο δεύτερος μπορεί επίσης να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις n ομάδες, και ο k -στος φοιτητής σε οποιαδήποτε από n ομάδες.

Άρα υπάρχουν n^k τρόποι για να τοποθετήσουμε n φοιτητές σε k ομάδες.

(β) Τα τρία διαγωνίσματα μπορούν να προγραμματιστούν σε μια περίοδο 5 ημερών με $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ τρόπους.

(γ) Για τη πρώτη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων. Αφού επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα και για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων. Το ίδιο ισχύει και για τη τρίτη και τέταρτη θέση.

Άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συμβολοσειρών με τέσσερα γράμματα είναι $24 \times 24 \times 24 \times 24 = 24^4 = 331776$.

(ii) Υποθέτοντας ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις:

(α) Ο πρώτος φοιτητής μπορεί να καθίσει σε οποιαδήποτε από τις 7 θέσεις, ο δεύτερος σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 6 θέσεις, ο τρίτος φοιτητής σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 5 θέσεις και ο τέταρτος φοιτητής σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 4 θέσεις. Συνεπώς ο συνολικός τρόπος με το οποίο μπορούν να καθίσουν k φοιτητές σε n θέσεις είναι: $P(7, 4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

(β) Τα τρία διαγωνίσματα μπορούν να προγραμματιστούν σε μια περίοδο 5 ημερών με $P(5, 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ τρόπους.

(γ) Το πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα διάταξης 4 από 24 αντικείμενα. Για τη πρώτη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων, για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 23 επιλογές γραμμάτων (από τα υπόλοιπα 23 γράμματα), για τη τρίτη θέση υπάρχουν 22 επιλογές γραμμάτων (από τα υπόλοιπα 22 γράμματα), και για τη τέταρτη θέση υπάρχουν 21 επιλογές (από τα υπόλοιπα 21 γράμματα). Άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συμβολοσειρών με τέσσερα διαφορετικά γράμματα είναι $P(24, 4) = 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 255024$.

(δ) Η συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί πρόβλημα διάταξης 4 από 6 αντικείμενα. Άρα η λύση είναι: $P(6, 4) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

Άσκηση 2.

(α) Αυτό είναι ένα πρόβλημα επιλογής 10 από 100 αντικείμενα. Συνεπώς η λύση είναι

$$C(100, 10) = \frac{100!}{(10!90!)} = 17.310.309.456.440$$

(β) Πρέπει να επιλέξουμε 5 αγόρια από τα 40 και 5 κορίτσια από τα 60. Υπάρχουν $C(40, 5)$ τρόποι να επιλέξουμε τα αγόρια και $C(60, 5)$ τρόποι να επιλέξουμε τα κορίτσια. Εφόσον θα πραγματοποιήσουμε και τα δύο πειράματα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να σχηματίσουμε την επιτροπή είναι:

$$C(40, 5) \times C(60, 5) = \frac{40!}{5!35!} \times \frac{60!}{5!55!} = 658.008 \times 5.461.512 = 3.593.718.588.096$$

(γ) Ας ονομάσουμε ως πρώτο πείραμα το σχηματισμό της επιτροπής από 6 αγόρια και 4 κορίτσια. Πρέπει να επιλέξουμε 6 αγόρια από τα 40 και 4 κορίτσια από τα 60. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να σχηματίσουμε την επιτροπή είναι:

$$C(40, 6) \times C(60, 4) = \frac{40!}{6!34!} \times \frac{60!}{4!56!} = 3.838.380 \times 487.635 = 1.871.728.431.300$$

Ας ονομάσουμε ως δεύτερο πείραμα το σχηματισμό της επιτροπής από 4 αγόρια και 6 κορίτσια. Πρέπει να επιλέξουμε 4 αγόρια από τα 40 και 6 κορίτσια από τα 60. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να σχηματίσουμε την επιτροπή είναι:

$$C(40, 4) \times C(60, 6) = \frac{40!}{4!36!} \times \frac{60!}{6!54!} = 91.390 \times 50.063.860 = 4.575.336.165.400$$

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ταυτόχρονα και τα δύο πειράματα. Η επιτροπή μπορεί να σχηματιστεί ή μόνο με τον ένα, ή μόνο με τον άλλο τρόπο. Συνεπώς θα εφαρμόσουμε το κανόνα του αθροίσματος. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων είναι:

$$1.871.728.431.300 + 4.575.336.165.400 = 6.447.064.596.700$$

Άσκηση 3.

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλαδή $\binom{49}{6}$

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής: Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν. Στη συνέχεια μένουν $\binom{49-6}{6-4} = \binom{43}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα 2 λάθος νούμερα. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$. Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου A: "να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα" είναι,

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816} \approx 0.000969$$

Άσκηση 4.

Υπάρχουν $\binom{19}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε 3 σφαίρες από τις συνολικά 19 σφαίρες στην περίπτωση της δειγματοληψίας χωρίς επανάθεση, επομένως έχουμε:

$$(a) P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}, \text{ αν κάθε σφαίρα που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση)}$$

$$(b) P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}, \text{ αν κάθε σφαίρα που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση)}$$

Υπάρχουν 19^3 τρόποι να επιλέξουμε 3 σφαίρες από τις συνολικά 19 σφαίρες στην περίπτωση της δειγματοληψίας με επανάθεση, επομένως έχουμε:

$$(γ) P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{5^3 + 6^3 + 8^3}{19^3}, \text{ αν κάθε σφαίρα που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί η επόμενη (δειγματοληψία με επανάθεση)}$$

$$(δ) P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8}{19^3}, \text{ αν κάθε σφαίρα που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί η επόμενη (δειγματοληψία με επανάθεση)}$$

Άσκηση 5.

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, $\dots$, k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_m!}.$$

Με βάση αυτόν τον τύπο η λύση του προβλήματος είναι απλή:

(a) με την λέξη "ΚΡΙΜΑ" μπορούμε να κάνουμε $5!$ αναγραμματισμούς.

(b) με την λέξη "ΚΑΛΗΜΕΡΑ" μπορούμε να κάνουμε $\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$ αναγραμματισμούς.

(γ) με την λέξη "ΠΑΠΑΚΙ" μπορούμε να κάνουμε $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$ αναγραμματισμούς.

(γ) με την λέξη "ΑΓΓΑΡΕΙΑ" μπορούμε να κάνουμε $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$ αναγραμματισμούς.

Άσκηση 6. Υπάρχουν n διαδοχικές ρίψεις του νομίσματος.

- (α) Δεδομένου ότι ήρθε κεφαλή ακριβώς μια φορά, αυτή η κεφαλή μπορεί να ήρθε σε οποιοδήποτε από τις n ρίψεις. Επομένως, η πιθανότητα ότι στην πρώτη ρίψη του νομίσματος ήρθε κεφαλή είναι

$$\frac{1}{n}$$

- (β) Δεδομένου ότι ήρθαν ακριβώς δύο κεφαλές και ότι στην πρώτη ρίψη είχαμε σίγουρα κεφαλή, τότε υπάρχουν $n - 1$ ρίψεις στις οποίες μπορεί να ήρθε η δεύτερη κεφαλή. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να πάρουμε δύο κεφαλές είναι $\binom{n}{2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{n - 1}{\binom{n}{2}}$$

- (γ) Δεδομένου ότι ήρθαν ακριβώς 7 κεφαλές, η πιθανότητα να πάρουμε τρεις κεφαλές στις τέσσερις πρώτες ρίψεις αποτελείται από τρία μέρη.

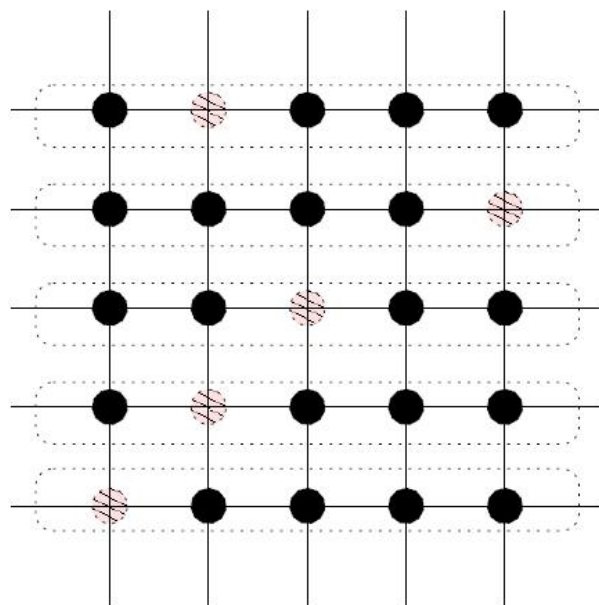
1. Ο αριθμός των τρόπων να πάρουμε 3 κεφαλές στις 4 πρώτες ρίψεις είναι $\binom{4}{3}$
2. Ο αριθμός των τρόπων να πάρουμε 4 κεφαλές στις εναπομείναντες $n - 4$ ρίψεις είναι $\binom{n-4}{4}$
3. Ο αριθμός των τρόπων να πάρουμε 7 κεφαλές στις n ρίψεις είναι $\binom{n}{7}$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{4}{3} \binom{n-4}{4}}{\binom{n}{7}}$$

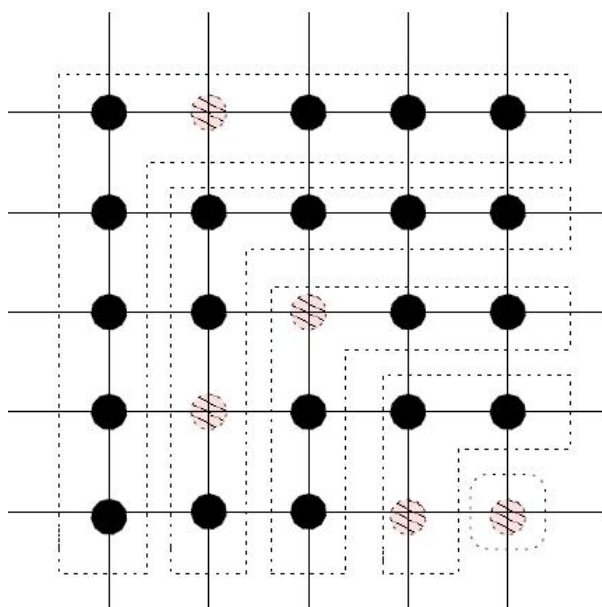
Άσκηση 7.

- (α) Υπάρχουν συνολικά $(25)(24)(23)(22)(21) = \frac{25!}{20!}$ τρόποι να επιλέξουμε 5 πέτρες από 25 πέτρες, αφού υπάρχουν 25 τρόποι να επιλέξουμε την 1η πέτρα, 24 τρόποι να επιλέξουμε την 2η πέτρα κ.ο.κ. Εάν θέλουμε να επιλέξουμε 5 πέτρες ώστε να είναι σε διαφορετική σειρά, ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να το κάνουμε είναι 25 χρησιμοποιώντας αρχή κατεμέτρησης. Αφού η 2η πέτρα δεν μπορεί να βρίσκεται στην ίδια σειρά, ο αριθμός των τρόπων επιλογής της είναι $25 - 5 = 20$. Με την ίδια λογική ο αριθμός των τρόπων για να επιλέξουμε την 3η πέτρα είναι $20 - 5 = 15$, επειδή δεν μπορεί να βρίσκεται στις προηγούμενες δύο σειρές. Για να επιλέξουμε την 4η πέτρα έχουμε 10 τρόπους, και για την 5η έχουμε 5 τρόπους. Επομένως η πιθανότητα να επιλέξουμε 5 πέτρες και να βρίσκονται σε διαφορετική σειρά η καθεμία είναι $\frac{(25)(20)(15)(10)(5)}{\frac{25!}{20!}}$.



Σχήμα 1: Βρίσκονται σε διαφορετική σειρά

(β) Κοιτώντας τον 5×5 πίνακα που σχηματίζεται από τις πέτρες παρατηρούμε ότι υπάρχουν 5 θέσεις ώστε να βάλουμε την 1η πέτρα στην 1η γραμμή. Μόλις τοποθετήσουμε την 1η πέτρα υπάρχουν 4 θέσεις για να βάλουμε την 2η πέτρα στην 2η γραμμή, αφού η στήλη που χρησιμοποιήθηκε από την 1η πέτρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τη 2η πέτρα. Επομένως έχουν μείνει 3 θέσεις ώστε να τοποθετήσουμε την 3η πέτρα στην 3η γραμμή, 2 για την 4η και 1 για την 5η. Επομένως ο συνολικός αριθμός πιθανών τοποθετήσεων για μια συγκεκριμένη σειρά είναι: $(5)(4)(3)(2)(1)$. Επομένως ο συνολικός αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε 5 πέτρες ώστε να είναι σε διαφορετικές γραμμές και διαφορετικές στήλες είναι $(5!)(5!)$. Ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε 5 πέτρες από 25 πέτρες είναι $\frac{25!}{20!}$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{5!5!}{25!}$.



Σχήμα 2: Επιλογή από διαφορετική σειρά και στήλη

Εναλλακτικός τρόπος σκέψης για το πρόβλημα είναι ο ακόλουθος. Υπάρχουν 25 θέσεις ώστε να επιλέξουμε την 1η πέτρα. Αν απορρίψουμε όλες τις υπόλοιπες θέσεις της γραμμής και της στήλης της 1ης πέτρας μένουν 16 πιθανές θέσεις ώστε να τοποθετήσουμε την 2η πέτρα. Μόλις την τοποθετήσουμε αποκλείουμε την γραμμή και την στήλη στις οποίες ανήκει. Απομένουν 9 θέσεις για την 3η πέτρα, 4 θέσεις για την 4η πέτρα και 1 θέση για την 5η πέτρα. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων επιλογής για τις 5 πέτρες που βρίσκονται σε διαφορετικές γραμμές και στήλες είναι $(25)(16)(9)(4)(1)$. Η πιθανότητα είναι $\frac{(25)(16)(9)(4)(1)}{25!}$.