

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Θεωρούμε τα παρακάτω:

A : Το ένδεχομενο να είναι άντρας και να πάσχει από αχρωματοψία

B : Το ενδεχόμενο να πάσχει από αχρωματοψία

Γ : Το ένδεχομενο να είναι γυναίκα και να πάσχει από αχρωματοψία

Ο συνολικός αριθμός ατόμων που υπάρχει στην αίθουσα είναι $40 + 70 = 110$

(α) Από το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \\ &0.14 \cdot \frac{40}{110} + 0.02 \cdot \frac{70}{110} \approx 0.063 \end{aligned}$$

(β) Στην περίπτωση που το πλήθος των αντρών και των γυναικών είναι ίσο έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \\ &0.14 \cdot \frac{1}{2} + 0.02 \cdot \frac{1}{2} = 0.08 \end{aligned}$$

(γ) Αν ο αριθμός των γυναικών είναι διπλάσιος από τον αριθμό των αντρών έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \\ &0.14 \cdot \frac{1}{3} + 0.02 \cdot \frac{2}{3} = 0.06 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : Το αποτέλεσμα της εξέτασης να είναι αρνητικό.

Θ : Το αποτέλεσμα της εξέτασης να είναι θετικό.

B : Το ενδεχόμενο ένα τυχαίο άτομο του πληθυσμού να πάσχει από την ασθένεια.

Οι αντίστοιχες πιθανότητες των απλών ενδεχομένων είναι:

$$P(B) = \frac{1}{1000} = 0.001, P(A/B) = 0.01, P(\Theta/B^C) = 0.02$$

$$P(B^C) = \frac{999}{1000} = 0.999, P(\Theta/B) = 0.99, P(A/B^C) = 0.98$$

(α)

Η πιθανότητα το αποτέλεσμα της εξέτασης να προκύψει θετικό, είναι σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P(\Theta/B) \cdot P(B) + P(\Theta/B^C) \cdot P(B^C) \\ &= 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.0297 \end{aligned}$$

(β)

Σύμφωνα με τον νόμο του Bayes, αν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό, η πιθανότητα να πάσχει πράγματι το άτομο από την ασθένεια γίνεται:

$$P(B/\Theta) = \frac{P(\Theta/B)P(B)}{P(\Theta/B) \cdot P(B) + P(\Theta/B^C) \cdot P(B^C)} = \frac{P(\Theta/B)P(B)}{P(\Theta)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.0297} \approx 0.047$$

Άσκηση 3.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: Ένας εργαζόμενος φτάνει καθυστερημένος στη δουλειά του.

Λ: Παίρνει λεωφορείο.

T: Παίρνει ταξί.

Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$P(A/\Lambda) = \frac{30}{100} = 0.3, P(A/T) = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$P(T) = \frac{20}{100} = 0.2, P(\Lambda) = \frac{80}{100} = 0.8$$

(α)

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ), η πιθανότητα να πάει ο εργαζόμενος μία μέρα καθυστερημένος στη δουλειά του είναι:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/\Lambda) \cdot P(\Lambda) + P(A/T) \cdot P(T) \\ &= 0.3 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.26 \end{aligned}$$

(β)

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχει πάει με λεωφορείο στη δουλειά του, δεδομένου ότι έχει πάει καθυστερημένος:

$$P(\Lambda/A) = \frac{P(A/\Lambda)P(\Lambda)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.26} = 0.92$$

Άσκηση 4.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: Ένας οδηγός βάζει αμόλυβδη βενζίνη.

B: Ένας οδηγός βάζει ενισχυμένη βενζίνη.

Γ: Ένας οδηγός βάζει υψηλής ποιότητας βενζίνη.

Δ: Ένας οδηγός γεμίζει τελείως τη δεξαμενή καυσίμου του.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων γίνονται:

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.35, P(\Gamma) = 0.25$$

Επίσης έχουμε:

$$P(\Delta/A) = 0.3, P(\Delta/B) = 0.5, P(\Delta/\Gamma) = 0.4$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ), η πιθανότητα ένας τυχαίος οδηγός να γεμίσει πλήρως τη δεξαμενή καυσίμων του είναι:

$$\begin{aligned} P(\Delta) &= P(A) \cdot P(\Delta/A) + P(B) \cdot P(\Delta/B) + P(\Gamma) \cdot P(\Delta/\Gamma) \\ &= 0.3 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.35 + 0.6 \cdot 0.25 = 0.445 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

M: Επιλέγουμε την κάρτα που είναι μπλε και από τις δύο πλευρές.

K: Επιλέγουμε την κάρτα που είναι κίτρινη και από τις δύο πλευρές.

H: Επιλέγουμε την κάρτα που είναι από την μία πλευρά κίτρινη και από την άλλη πλευρά μπλε.

A: Η επιλεγμένη πλευρά να είναι κίτρινη.

Έχουμε ότι:

$$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(K) \cdot P(A/K) + P(H) \cdot P(A/H) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα να είναι η επιλεγμένη πλευρά κίτρινη δεδομένου ότι και η άλλη πλευρά της κάρτας είναι κίτρινη γίνεται:

$$P(K/A) = \frac{P(K \cap A)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Άσκηση 6.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A={Το πρώτο ζάρι φέρνει: 1, 2, ή 3}

B={Το δεύτερο ζάρι φέρνει: 2, 3, ή 6}

Γ={Το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι 9} = {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}

(α)

Έχουμε: $A \cap B \cap C = \{(3, 6)\}$

Τα ζάρια είναι δίκαια, και τα πειράματα εκτελούνται ανεξάρτητα. Οπότε η πιθανότητα να προκύψει οποιοδήποτε ζευγάρι είναι $1/36$. Οι πιθανότητες των παραπάνω απλών ενδεχομένων γίνονται:

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/2, P(\Gamma) = 4/36 = 1/9,$$

$$\text{και } P(A \cap B \cap C) = 1/36.$$

$$\text{Όμως: } P(A)P(B)P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(A \cap B \cap C)$$

(β)

Εξετάζουμε αν τα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα:

$$A \cap B = \{\text{Το πρώτο ζάρι να είναι 2 ή 3}\}. \text{ Έχουμε: } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ και:}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα, } P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Συνεπώς, τα A, B, Γ δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Άσκηση 7.

(α)

Εφόσον τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B^C) &= P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A^C) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A^C) - P(B) \cdot (1 - P(A)) \\ &= P(A^C) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(A^C) \cdot P(B^C) \end{aligned}$$

Επομένως και τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα, A^C και B^C είναι ανεξάρτητα.

(β)

(i) Τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα, οπότε ισχύει:

$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$ Για να είναι ανεξάρτητα τα γεγονότα $A \cup B, \Gamma$ θα πρέπει:

$$P((A \cup B) \cap \Gamma) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma)$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap \Gamma) &= P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) = P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \\ &= P(A) \cdot P(\Gamma) + P(B) \cdot P(\Gamma) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \\ &= P(\Gamma) \cdot [P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)] \\ &= P(\Gamma) \cdot P(A \cup B) \end{aligned}$$

Επομένως τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(ii) Για να είναι τα γεγονότα $A, B \cap \Gamma$ ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει:

$$P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A) \cdot P(B \cap \Gamma)$$

Έχουμε ότι:

$$P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = P(A) \cdot P(B \cap \Gamma),$$

οπότε τα ενδεχόμενα $A, B \cap \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 8.

Από τις πληροφορίες που δίνει το πρόβλημα συμπεραίνουμε ότι και οι 2 γονείς του Χρήστου έχουν από ένα γονίδιο καστανού ματιού. Κατά τη γέννηση του ο Χρήστος είχε τις ίδιες πιθανότητες να αποκτήσει είτε ένα γαλανό είτε ένα καστανό γονίδιο από τον κάθε γονέα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: K ={γονίδιο καστανού χρώματος}, Γ ={γονίδιο γαλανού χρώματος}, S ={Το ζευγάρι των γονιδίων}.

(α) Έστω A : το ενδεχόμενο ότι ο Χρήστος έχει μόνο 1 γονίδιο γαλανού χρώματος, γνωρίζοντας ότι έχει καστανά μάτια. Επομένως, η πιθανότητα του ενδεχομένου να αποκτήσει ο Χρήστος γονίδιο γαλανού ματιού γίνεται:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{S = K\Gamma\} / S = KK \text{ ή } S = K\Gamma) \\ &= \frac{1/2}{1/4 + 1/2} = 2/3 \end{aligned}$$

(β) Η σύζυγος του Χρήστου έχει γαλανά μάτια. Οπότε έχουμε:

Έστω F : το γεγονός το πρώτο τους παιδί να έχει γαλανά μάτια.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|A)P(A) + P(F|A^c)P(A^c) \\ &= (1/2) \cdot (2/3) + 0 \cdot (1/3) = 1/3 \end{aligned}$$

(γ) Έστω FK : το γεγονός το πρώτο τους παιδί να έχει καστανά μάτια, SK : το γεγονός το δεύτερό τους παιδί να έχει επίσης καστανά μάτια, και E : το γεγονός ότι ο Χρήστος έχει ένα γονίδιο καστανού και ένα γονίδιο γαλανού χρώματος. Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$P(SK/FK) = P(SK/FK, E) \cdot P(E/FK) + P(SK/FK, E^C) \cdot P(E^C/FK) \quad (1)$$

$$= P(SK/E) \cdot P(E/FK) + P(SK/E^C) \cdot P(E^C/FK) \quad (2)$$

Επίσης, έχουμε:

$$P(E/FK) = \frac{P(FK/E) \cdot P(E)}{P(FK/E) \cdot P(E) + P(FK/E^C) \cdot P(E^C)} \quad (3)$$

$$= \frac{1/2 \cdot 2/3}{1/2 \cdot 2/3 + 1 \cdot 1/3} = 1/2 \quad (4)$$

Επομένως, η πιθανότητα του ενδεχομένου να έχει και το δεύτερο παιδί καστανά μάτια, εάν έχει και το πρώτο καστανά μάτια, γίνεται:

$$P(SK/FK) = 1/2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 3/4 \quad (5)$$