

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Ισχύουν τα παρακάτω:

A : Το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο

B : Σε μια ρίψη έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο

C : Το άθροισμα των ζαριών να είναι 4

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

$$C = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

(α) $AB = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1)\}$

(β) $A \cup B$: Συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο ή όταν τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια προσγειώνεται στον άσσο.

$$A \cup B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

(γ) AB^c : Συμβαίνει όταν κανένα από τα δύο ζάρια δεν προσγειώνεται στον άσσο, ενώ το αποτέλεσμα είναι άρτιο.

$$AB^c = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

(δ) ABC : Συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο, έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο και το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 4.

$$ABC = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

Άσκηση 2.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

E : Να βρεθεί ένα ελαττωματικό CD .

K : Να βρεθεί ένα καλό CD .

Το δενδρικό διάγραμμα του πειράματος τύχης είναι:

(α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος γίνεται:

$$\Omega = \{KKKK, KKKE, KKEK, KKEE, KEKK, KEKE, KEE, EKKK, EKKE, EKE, EE\}$$

(β)

(i) Το πολύ ένα ελαττωματικό CD :

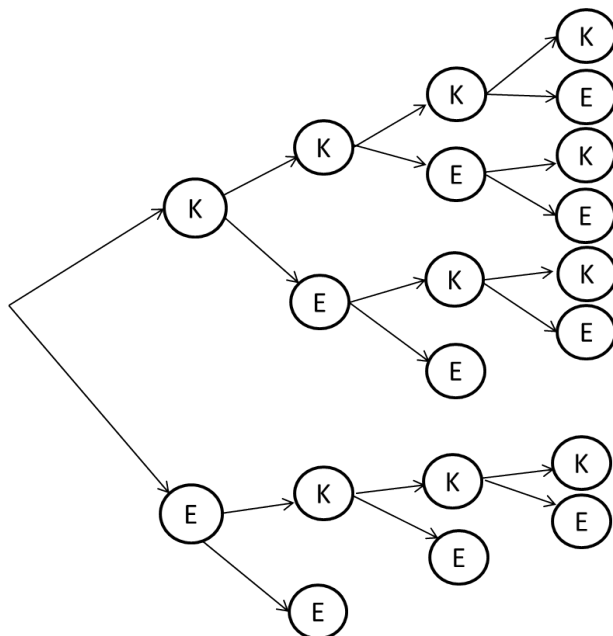
$$E = \{KKKK, KKKE, KKEK, KEKK, EKKK\}$$

(ii) Ακριβώς δύο ελαττωματικά CD :

$$F = \{KKEE, KEKE, KEE, EKKE, EKE, EE\}$$

(iii) Να ελεγχθούν συνολικά 4 CD :

$$G = \{KKKK, KKKE, KKEK, KKEE, KEKK, KEKE, EKKK, EKKE\}$$



Σχήμα 1: Δενδρική Αναπαράσταση σχήματος ερωτήματος 2(α)

(γ)

Να βρεθούν ακριβώς 2 ελαττωματικά CD και να ελεγχθούν συνολικά 4 CD :

$$F \cap G = \{KKKEE, KEKEE, EKKEE\}$$

Να ελεγχθούν συνολικά 4 CD , αλλά να βρεθούν περισσότερα από 1 ελαττωματικό:

$$G - E = F \cap G.$$

Άσκηση 3.

(α) Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι: $N(\Omega) = x + (x + 2)^2 = x^2 + 5x + 4$

Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$P(A) = \frac{x}{x^2 + 5x + 4},$$

και:

$$P(M) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 4},$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A) + \frac{4}{5} \\ \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 4} &= \frac{x}{x^2 + 5x + 4} + \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\ 5(x^2 + 4x + 4) &= 5x + 4(x^2 + 5x + 4) \Leftrightarrow \\ 5x^2 + 20x + 20 &= 5x + 4x^2 + 20x + 16 \Leftrightarrow \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 4 \end{aligned}$$

Για $x = 1$, τα στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι: $N(\Omega) = 10$. Οπότε η τιμή $x = 1$ απορρίπτεται, διότι πρέπει $N(\Omega) > 15$.

Για $x = 4$, τα στοιχεία του δειγματικού χώρου γίνονται $N(\Omega) = 40$, η οποία τιμή είναι δεκτή.

Η πιθανότητα επιλογής μαύρης σφαίρας, για $x = 4$ γίνεται: $P(M) = 9/10$.

(γ) Θεωρούμε ως συνάρτηση του x , $\forall x > 0$, την πιθανότητα επιλογής άσπρης σφαίρας:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 4},$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(x^2 + 5x + 4) - x(x^2 + 5x + 4)'}{(x^2 + 5x + 4)^2} \\ &= \frac{x^2 + 5x + 4 - 2x^2 - 5x}{(x^2 + 5x + 4)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} \\ &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x^2 + 5x + 4)^2} \end{aligned}$$

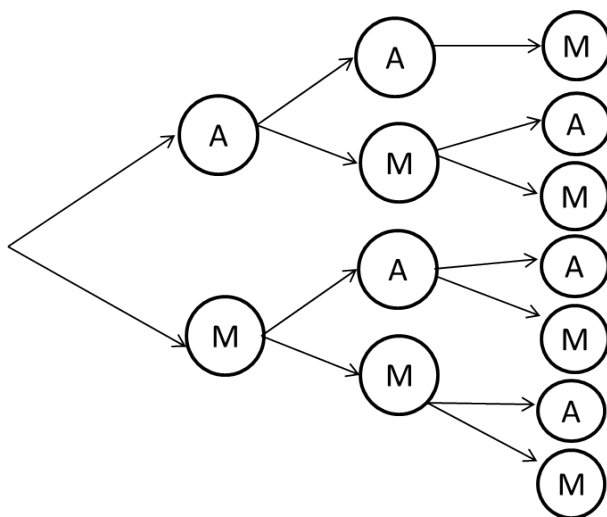
Έχουμε ότι:

Για $x > 2 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $x < 2 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Επομένως, για $x = 2$, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Συνεπώς, η πιθανότητα να επιλέξουμε άσπρη σφαίρα μεγιστοποιείται.

(δ) Για $x = 2$ έχουμε 2 άσπρες και 16 μαύρες σφαίρες μέσα στο κουτί. Κατασκευάζουμε το παρακάτω δενδρικό διάγραμμα:



(β) Ισχύει ότι $G - A \subseteq G$, οπότε:

$$\begin{aligned} P(G - A) &\leq P(G) \Leftrightarrow P(G) = \frac{240}{400} = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow P(G - A) &\leq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(γ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - G$.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A \cup G) &= 1 \Leftrightarrow \\ P(A) + P(G) - P(A \cap G) &= 1 \Leftrightarrow \\ P(A \cap G) &= P(A) + P(G) - 1 \Leftrightarrow \\ P(A \cap G) &= \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 1 \Leftrightarrow \\ P(A \cap G) &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

Άρα:

$$P(A - G) = P(A) - P(A \cap G) = \frac{34}{40} - \frac{9}{20} = \frac{2}{5}$$

(δ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A - G) \cup (G - A)$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P[(A - G) \cup (G - A)] &= P(A - G) + P(G - A) \\ &= P(A) - P(A \cap G) + P(G) - P(A \cap G) \\ &= P(A) + P(G) - 2P(A \cap G) \\ &= \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 2 \cdot \frac{9}{20} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

(α) Έχουμε ότι:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

(β) Οι ζητούμενες πιθανότητες γίνονται:

(i)

$$P(A) = P(\{2, 3, 4\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) \quad (1)$$

$$= 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{7}{16} \quad (2)$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(B) = P(\{1, 3, 5, \dots\}) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\{2i + 1\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(iii)

$$P(\Gamma) = P(\{2, 4, 6, \dots\}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 6.

Ζητείται να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A^c \cap B^c$. Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο: $A \cap B = \emptyset$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - (0.45 + 0.30) \\ &= 1 - 0.75 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

Προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) \\ \beta &= P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) \end{aligned}$$

Οι έδρες του με περιττό αριθμό έχουν διπλάσια πιθανότητα εμφάνισης από τις έδρες με άρτιο αριθμό. Επομένως:

$$\alpha = 2 \cdot \beta$$

Σύμφωνα με τα αξιώματα της Προσθετικότητας (*additivity*) και της Κανονικοποίησης (*normalization*), θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 &= 3\alpha + 3\beta \Leftrightarrow \\ 1 &= 3 \cdot (2\beta) + 3\beta \Leftrightarrow \\ 1 &= 6\beta + 3\beta \Leftrightarrow \\ 1 &= 9\beta \Leftrightarrow \\ \beta &= 1/9 \end{aligned}$$

Επομένως, $\alpha = 2/9$, και η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(\{5, 6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$