

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Προόδου- 22 Νοεμβρίου 2014

Θέμα 1 - (15 μονάδες)

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}P(C|A \cup B) &= \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(CA \cup CB)}{P(A \cup B)} \\&= \frac{P(CA) + P(CB)}{P(A) + P(B)}, \quad [A, B: \text{ξένα μεταξύ τους}] \\&= \frac{P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B)}{P(A) + P(B)}\end{aligned}$$

Επομένως, λύνοντας ως προς $P(C|B)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}P(C|B) &= \frac{P(C|A \cup B) \cdot [P(A) + P(B)] - P(C|A) \cdot P(A)}{P(B)} \\&= \frac{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}}{1/6} = \frac{3}{7} = 0.4286\end{aligned}$$

Θέμα 2 - (20 μονάδες)

Έστω X το πλήθος των εργασιών που υποβάλλονται σε ένα δευτερόλεπτο.

Μας δίνεται ότι $X \sim Poisson(\lambda = 2)$. Η συνάρτηση πιθανότητας γίνεται:

$$P_X(k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ορίζουμε τώρα τα εξής γεγονότα που μας ενδιαφέρουν:

$B = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος διακομιστής είναι χαλασμένος.}\}$

$N = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος διακομιστής είναι νέος}\}$

$O = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος διακομιστής είναι παλιός}\}$

Μας δίνονται οι πιθανότητες: $P(N) = 0.2$ και $P(O) = 0.8$

(α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ) και έχουμε:

$$\begin{aligned}P(B) &= P(N) \cdot P(B|N) + P(O) \cdot P(B|O) \\&= P(N) \cdot P(X > 3) + P(O) \cdot P(X > 1) \\&= P(N) \cdot [1 - P(X \leq 3)] + P(O) \cdot [1 - P(X \leq 1)] \\&= 0.2[1 - \sum_{k=0}^3 P_X(k)] + 0.8[1 - \sum_{k=0}^1 P_X(k)] \\&= 0.2[1 - e^{-2} - 2e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} - \frac{2^3}{3!}e^{-2}] + 0.8[1 - e^{-2} - 2e^{-2}] \\&= 0.5038\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζουμε τον κανόνα του *Bayes*:

$$\begin{aligned} P(O|B) &= \frac{P(O \cap B)}{P(B)} = \frac{P(O) \cdot P(B|O)}{P(B)} \\ &= \frac{0.8P(X > 1)}{0.5038} = \frac{0.8(1 - e^{-2} - 2e^{-2})}{0.5038} = 0.9432 \end{aligned}$$

(γ) Μετά την αντικατάσταση, 40% των διακομιστών είναι παλιοί και 60% είναι νέοι. Δηλαδή έχουμε ότι: $P(N) = 0.6$ και $P(O) = 0.4$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} P(B) &= 0.6P(X > 3) + 0.4P(X > 1) \\ &= 0.6(1 - e^{-2} - 2e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} - \frac{2^3}{3!}e^{-2}) + 0.4(1 - e^{-2} - 2e^{-2}) \\ &= \dots = 0.3233 \end{aligned}$$

Έχουμε μια βελτίωση της τάξης του:

$$\frac{0.5038 - 0.3233}{0.5038} \simeq 36\%$$

(δ) Εφαρμόζουμε τον κανόνα του *Bayes*:

$$P(N|B) = \frac{P(N) \cdot P(B|N)}{P(B)} = \frac{0.6P(X > 3)}{0.3233} = 0.2652$$

Θέμα 3 - (20 μονάδες)

(α) Ερμηνεύοντας τον μηχανισμό που περιγράφει η εκφώνηση, παρατηρούμε ότι:

(i) Για $1 \leq k \leq n-1$, η τ.μ X παίρνει την τιμή k αν τα $(k-1)$ πρώτα της σήματα δεν λάβουν απάντηση και το k -οστό της σήμα λάβει απάντηση.

(ii) Επίσης, η τ.μ X παίρνει την τιμή n αν τα πρώτα $n-1$ της σήματα δεν λάβουν απάντηση, ανεξάρτητα από το τι γίνεται στη μετάδοση του n -οστού της σήματος.

Επομένως,

(i): $P_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$

(ii): $P_X(n) = P(X = n) = (1-p)^{n-1}$

Σε μία έκφραση:

$$P_X(k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} \cdot p, & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ (1-p)^{n-1}, & k = n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ελέγχουμε αν οι τιμές που βρήκαμε αθροίζονται στη μονάδα:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_X(k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} \cdot p + (1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{n-2} (1-p)^m \cdot p + (1-p)^{n-1} \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)} \cdot p + (1-p)^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

- (β) Η πιθανότητα να πάρουμε "busy signal" είναι ίση με την πιθανότητα να μην λάβουν απάντηση τα n σήματά της:

$$P(\text{busy signal}) = (1 - p)^n$$

- (γ) Ζητάμε να ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} P(\text{busy signal}) \leq 0.001 &\Rightarrow (1 - p)^n \leq 0.001 \\ &\Rightarrow (1 - 0.9)^n \leq 0.001 \Rightarrow 0.1^n \leq 0.001 \Rightarrow n \geq 3 \end{aligned}$$

Για $n = 3$, έχουμε:

$$P_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ (1 - p)p, & k = 2 \\ (1 - p)^2, & k = 3 \end{cases} = \begin{cases} 0.9, & k = 1 \\ 0.09, & k = 2 \\ 0.01, & k = 3 \end{cases}$$

Επομένως, οι μεταδόσεις κατά μέσο όρο γίνονται:

$$E[X] = 1 \times 0.9 + 2 \times 0.09 + 3 \times 0.01 = 1.11$$

Θέμα 4 - (20 μονάδες)

- (α) Προφανώς, η τ.μ X μετρά το πλήθος των επιτυχιών (να έρθει "6") σε $n = 10$, ανεξάρτητες, πανομοιότυπες δοκιμές *Bernoulli*, όπου η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι $1/6$ (διότι το ζάρι μας είναι δίκαιο). Επομένως, έχουμε: $X \sim \Delta(n = 10, p = \frac{1}{6})$. Η συνάρτηση πιθανότητας περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$P_X(k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}, k = 0, 1, \dots, 10$$

Η μέση τιμή της X γίνεται:

$$E[X] = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Η διασπορά, $var(X)$ γίνεται:

$$var(X) = np(1 - p) = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{18} = 1.39$$

Επομένως,

$$E[X^2] = var(X) + (E[X])^2 = \frac{25}{18} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 4.17$$

- (β) Αν παίζουμε το παιχνίδι 10 φορές, θα φέρουμε X φορές το 6 και $10 - X$ φορές "όχι" 6. Συνεπώς, το συνολικό κέρδος μας Z , θα είναι:

$$Z = 10X - 2(10 - X) = 12X - 20$$

Το αναμενόμενο κέρδος μας θα είναι:

$$E[Z] = 12E[X] - 20 = 12 \cdot \frac{5}{3} - 20 = 0$$

(γ) Η Y είναι Γεωμετρική τ.μ με παράμετρο $p = \frac{1}{6} \Rightarrow Y \sim Geo(p = \frac{1}{6})$.

Η συνάρτηση πιθανότητας γίνεται:

$$P_Y(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Η μέση τιμή είναι:

$$E[Y] = \frac{1}{p} = 6$$

(δ) Έστω W το πλήθος των παιχνιδιών (προσπαθειών) μέχρις ότου φέρουμε "6" για 5η φορά. Η W ακολουθεί κατανομή *Pascal* τάξης $r = 5$ με παράμετρο $p = \frac{1}{6}$:

$$W \sim Pascal(r = 5, p = \frac{1}{6}), \quad E[W] = \frac{r}{p} = \frac{5}{1/6} = 30$$

Σε αυτή την περίπτωση, το αναμενόμενο κέρδος μας είναι:

$$Z = 10 \cdot 5 - 2(W - 5) = 50 - 2W + 10 = 60 - 2W$$

Το αναμενόμενο κέρδος είναι:

$$E[Z] = 60 - 2E[W] = 60 - 2 \cdot 30 = 0$$

Μάλιστα, το ίδιο μέσο κέρδος(= 0) έχετε όσες φορές και αν παίζετε το παιχνίδι, 10, 100, ή $10^6, \dots$

Θέμα 5 - (25 μονάδες)

(α) Πρέπει: $\sum_x \sum_y P_{X,Y}(x, y) = 1$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 2)c + (2 \cdot 3)c + (3 \cdot 2)c + (3 \cdot 3)c + (5 \cdot 2)c + (5 \cdot 3)c &= 1 \\ (4 + 6 + 6 + 9 + 10 + 15)c &= 1 \\ \Rightarrow 50c = 1 \Rightarrow c &= \frac{1}{50} \end{aligned}$$

Ο πίνακας τιμών της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας και των περιθωριακών συναρτήσεων πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ γίνεται:

$\begin{array}{c} \backslash \\ X \end{array}$	2	3	5	$\mathbf{P_Y(y)}$
2	4/50	6/50	10/50	20/50
3	6/50	9/50	15/50	30/50
$P_X(x)$	10/50	15/50	25/50	

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(Y < X) &= P(\{(3, 2) \text{ ή } (5, 2) \text{ ή } (5, 3)\}) \\ &= P_{X,Y}(3, 2) + P_{X,Y}(5, 2) + P_{X,Y}(5, 3) \\ &= \frac{6}{50} + \frac{10}{50} + \frac{15}{50} = \frac{31}{50} \end{aligned}$$

(γ)

$$P(Y > X) = P(\{(2, 3)\}) = P_{X,Y}(2, 3) = \frac{6}{50}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(Y = X) &= P(\{(2, 2) \text{ ή } (3, 3)\}) = P_{X,Y}(2, 2) + P_{X,Y}(3, 3) \\ &= \frac{4}{50} + \frac{9}{50} = \frac{13}{50} \end{aligned}$$

(ε) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας των τ.μ X και Y είναι:

$$P_X(x) = \sum_Y P_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 10/50, & x = 2 \\ 15/50, & x = 3 \\ 25/50, & x = 5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \sum_X P_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 20/50, & y = 2 \\ 30/50, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(στ) $P(X = 5) = P_X(5) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

(ζ) Οι μέσες τιμές των τ.μ X και Y γίνονται:

$$E[X] = 2\frac{10}{50} + 3\frac{15}{50} + 5\frac{25}{50} = \frac{190}{50} = 3.8$$

$$E[Y] = 2\frac{20}{50} + 3\frac{30}{50} = \frac{130}{50} = 2.6$$

(η) Για να βρούμε τις διασπορές των τ.μ X και Y πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$E[X^2] = 2^2\frac{10}{50} + 3^2\frac{15}{50} + 5^2\frac{25}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

$$E[Y^2] = 2^2\frac{20}{50} + 3^2\frac{30}{50} = \frac{350}{50} = 7$$

Οπότε έχουμε,

$$var(X) = 16 - (3.8)^2 = 1.56$$

$$var(Y) = 7 - (2.6)^2 = 0.24$$