

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
22 Νοεμβρίου 2014 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 15 μονάδες. Έστω δύο ξένα μεταξύ τους γεγονότα A και B με πιθανότητες $P(A) = 1/2$ και $P(B) = 1/6$, αντίστοιχα. Αν $P(C | A) = 1/7$ και $P(C | A \cup B) = 3/14$, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(C | B)$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Μία συστοιχία διακομιστών (server cluster) περιέχει 20% νέους και 80% παλιούς διακομιστές. Υποθέτουμε ότι το πλήθος των εργασιών που οι χρήστες υποβάλουν σε κάθε διακομιστή σε ένα δευτερόλεπτο ακολουθεί Poisson κατανομή με μέση τιμή 2 εργασίες. Ένας νέος διακομιστής χαλάει αν το πλήθος των εργασιών που του υποβάλλονται υπερβεί τις 3, ενώ ένας παλιός διακομιστής χαλάει αν το πλήθος των εργασιών που του υποβάλλονται υπερβεί την 1.

(α) Ένας φοιτητής επιλέγει τυχαία ένα διακομιστή για να υποβάλει την εργασία του. Ποια είναι η πιθανότητα ο διακομιστής να είναι χαλασμένος;

(β) Αν ο τυχαία επιλεγμένος διακομιστής είναι χαλασμένος, ποια είναι η πιθανότητα ότι πρόκειται για παλιό διακομιστή;

Οι επανειλημμένες βλάβες οδηγούν τους διαχειριστές του συστήματος να αντικαταστήσουν τους μισούς παλιούς διακομιστές με νέους. Μετά την αντικατάσταση,

(γ) ποια είναι η πιθανότητα να είναι χαλασμένος ένας τυχαία επιλεγμένος διακομιστής; Πόσο έχει βελτιωθεί η κατάσταση σε σχέση με το (α);

(δ) αν ο τυχαία επιλεγμένος διακομιστής είναι χαλασμένος, ποια είναι η πιθανότητα ότι πρόκειται για νέο διακομιστή;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Όταν πατάτε το "CALL" στο κινητό σας, αυτό στέλνει ένα σήμα CIS (Call Initiate Signal) στον πιο κοντινό σταθμό βάσης (base station). Το τηλέφωνό σας περιμένει την απόκριση του σταθμού βάσης για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα. Αν λάβει απάντηση, τότε η κλήση σας αρχίζει. Αν δεν λάβει απάντηση, τότε στέλνει ξανά το CIS. Αν δεν λάβει καμία απάντηση μετά από n προσπάθειες, σταματά να προσπαθεί και σας δίνει busy signal.

Υποθέτουμε ότι όλες οι CIS μεταδόσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι κάθε μετάδοση λαμβάνει απάντηση με πιθανότητα p . Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως το πλήθος των CIS μεταδόσεων πριν την κλήση.

(α) Υπολογίστε το πεδίο τιμών και τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα να πάρετε busy signal.

(γ) Έστω $p = 0.9$. Αν ο πάροχος κινητής τηλεφωνίας επιθυμεί η πιθανότητα με την οποία λαμβάνετε busy signal να είναι μικρότερη ή ίση με 0.001, ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου n (πλήθος προσπαθειών) που πρέπει να χρησιμοποιήσει; Για αυτήν την τιμή του n , υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος των CIS μεταδόσεων.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Σε ένα παιχνίδι τύχης ρίχνετε ένα δίκαιο ζάρι. Αν φέρετε έξι ("6"), κερδίζετε 10 ευρώ. Διαφορετικά, χάνετε 2 ευρώ. Για παράδειγμα, αν παίξετε 10 φορές και 4 από αυτές φέρετε το έξι, το συνολικό σας κέρδος θα είναι 28 ($= 4 \times 10 - 6 \times 2$). Υποθέτουμε ότι τα αποτελέσματα των ρίψεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ορίζουμε την τ.μ. X ως το πλήθος των "6" που φέρνετε στις n προσπάθειες. Ορίζουμε και την τ.μ. Z ως το συνολικό σας κέρδος.

(α) Παίξετε το παιχνίδι 10 φορές. Περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X . Ποια είναι η $E[X]$ και $E[X^2]$;

(β) Παίξετε το παιχνίδι 10 φορές. Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος σας, $E[Z]$.

(γ) Υποθέστε τώρα ότι παίζετε συνέχεια μέχρις ότου κερδίσετε για πρώτη φορά (δηλαδή, μέχρις ότου φέρετε "6" για πρώτη φορά). Ορίζουμε την τ.μ. Y ως τον αριθμό του γύρου στον οποίο κερδίζετε για πρώτη φορά. Περιγράψτε πλήρως την τ.μ. Y . Ποια είναι η μέση τιμή της $E[Y]$;

(δ) Υποθέστε τώρα ότι παίζετε συνέχεια μέχρις ότου φέρετε 5 φορές "6". Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος σας σε αυτή την περίπτωση; Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Βοήθεια: Εντάξει, όλοι καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για ένα πείραμα αναξάρτητων δοκιμών Bernoulli. Για όσους δεν είχαν χώρο στο σκονάκι τους, ορίστε κάποια βασικά:

(i) Αν η W είναι Διωνυμική, $W \sim \Delta(n, p)$, τότε $E[W] = np$ και $var(W) = np(1 - p)$.

(ii) Αν η W είναι Γεωμετρική, $W \sim Geo(p)$, τότε $E[W] = \frac{1}{p}$ και $var(W) = \frac{1-p}{p^2}$.

(iii) Αν η W είναι Pascal τάξης r , $W \sim Pascal(r, p)$, τότε $E[W] = \frac{r}{p}$ και $var(W) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{αν } x \in \{2, 3, 5\} \text{ και } y \in \{2, 3\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;

(β) Ποια είναι η $P(Y < X)$;

(γ) Ποια είναι η $P(Y > X)$;

(δ) Ποια είναι η $P(Y = X)$;

(ε) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π. των X και Y .

(στ) Ποια είναι η $P(X = 5)$;

(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές των X και Y .

(η) Βρείτε τις διασπορές των X και Y .