Τμημα Επιστημης Υπολογιστων, Πανεπιστημιο Κρητης

ΗΥ-217: Πιθανότητες
9ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Καράλας Κώστας

12 Δεκεμβρίου 2014

Πρόβλημα 1

Ένα κύκλωμα υπολογιστή έχει διάρκεια ζωής η οποία αποτελεί μία συνεχή τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι ένα εργοστάσιο παράγει ένα μείγμα «καλών» και «κακών» κυκλωμάτων. Για κάποια θετική σταθερά a, η διάρκεια ζωής των καλών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο a ενώ η διάρκεια ζωής των κακών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $1000a$. Έστω ότι το ποσοστό των «καλών» κυκλωμάτων είναι p και ότι το ποσοστό των κακών κυκλωμάτων είναι $1 - p$.

(i) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί μετά από t μονάδες χρόνου.

(ii) Υπολογίστε την α.σ.κ. και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος.

(iii) Για να γίνει διαλογή των «καλών» κυκλωμάτων, κάθε κύκλωμα δοκιμάζεται για t μονάδες χρόνου και μόνο εκείνα τα οποία δεν χαλάνε κατά τη δοκιμή αποστέλλονται στους πελάτες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας πελάτης λαμβάνει ένα «κακό» κύκλωμα ως συνάρτηση των παραμέτρων a, p, και t. Αν $p = 0.9$, πόσο πρέπει να διαρκεί η δοκιμή (δηλαδή, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το t) ώστε η πιθανότητα να στέλνονται κακά κυκλώματα στους πελάτες να είναι μικρότερη από 1%;

Λύση:

Έστω ότι η τ.μ. X είναι ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος.

Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

A_t: "Το κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί κατά τη χρονική στιγμή t"

B: "Το κύκλωμα είναι κακό"

G: "Το κύκλωμα είναι καλό"

Κάνοντας χρήση των εκθετικών κατανομών έχουμε:

$$P(A_t \backslash G) = \int_t^{\infty} a \cdot e^{-ax} dx = e^{-at}$$

$$P(A_t \backslash B) = \int_t^{\infty} 1000 a e^{-1000ax} dx = e^{-1000at}$$

i) Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$P(A_t) = P(G) \cdot P(A_t \backslash G) + P(B)\, P(A_t \backslash B) =$$
$$= p \cdot e^{-at} + (1-p) \cdot e^{-1000at}$$

ii) Η α.σ.κ. της X είναι:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(A_x) = 1 - pe^{-ax} - (1-p)e^{-1000ax}$$

Επομένως, η σ.π.π. είναι:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = p \cdot a \cdot e^{-ax} + (1-p)\, 1000 a e^{-1000ax}$$

iii) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(B \backslash A_t) = \frac{P(B \cap A_t)}{P(A_t)} \quad (1)$$

Επίσης ισχύει ότι: $P(B \cap A_t) = P(B) \cdot P(A_t \backslash B) =$

$$= (1-p) e^{-1000at} \quad (2)$$

Επομένως, από (1) ∧ (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(B \backslash A_t) = \frac{(1-p)e^{-1000at}}{p \cdot e^{-at} + (1-p)e^{-1000at}} = \frac{1}{(p/(1-p))e^{999at} + 1}$$

Προκειμένου να ισχύει $P(B \backslash A_t) < 0.01$ όταν $p/(1-p) = 9$, πρέπει να ισχύει:

$$\frac{1}{9e^{999at}+1} < 0.01 \Leftrightarrow 1 < (9 \cdot e^{999at} + 1) \cdot 0.01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot e^{999at} > 99 \Leftrightarrow e^{999at} > 11 \Leftrightarrow t > \frac{\ln(11)}{999a}$$

Πρόβλημα 2

Ο Κώστας και η Μαρία συναγωνίζονται ποιος από τους δύο θα ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι. Η απόσταση X (σε μέτρα) που το ρίχνει ο Κώστας ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$, ενώ η απόσταση Y που το ρίχνει η Μαρία ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/60$.

(i) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει το φρίσμπι στα 75 μέτρα;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Μαρία θα ρίξει το φρίσμπι σε απόσταση μεγαλύτερη των 100 μέτρων;

(iii) Ποιες είναι οι μέσες αποστάσεις που το ρίχνουν ο Κώστας και η Μαρία;

(iv) Ποιος από τους δύο φίλους είναι πιο πιθανό να ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι; *Βοήθεια*: Βρείτε την από κοινού σ.π.π. των X και Y. Κατόπιν, αρκεί να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > Y)$.

(v) Δεδομένου ότι ο Κώστας στέλνει το φρίσμπι στα 75 μέτρα, ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π της απόστασης ρίψης της Μαρίας;

Λύση:

Έστω X και Y οι αποστασεις των βολών του Κώστα και της Μαριας αντιστοιχα.
Οι βολές είναι ανεξάρτητες, οπότε η κοινή σ.π.π. θα ισούται με:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}}, & 0 \leq x \leq 100,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

i) $$P(X=75) = \int_{75}^{75} \frac{1}{100}\, dx = 0$$

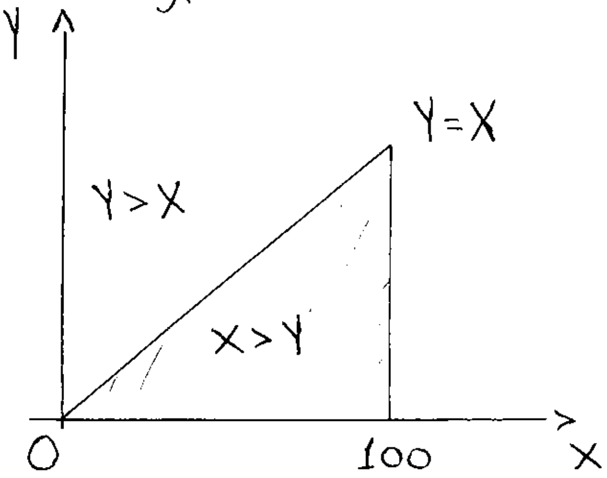
ii) $$P(Y>100) = \int_{100}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy = e^{-\frac{100}{60}} \simeq 0.1889$$

iii) $E[X] = \dfrac{0+100}{2} = 50$

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/60} = 60$$

iv) Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(X>Y)$ και να τη συγκρίνουμε με την πιθανότητα $P(X<Y)$.

Φτιάχνουμε το παρακάτω σχήμα:



Χρησιμοποιώντας το σχήμα, βρίσκω:

$$P(X>Y) = \int_0^{100}\int_0^{x} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{100}\int_0^{x} \frac{1}{100}\,\frac{1}{60}\,e^{-\frac{y}{60}}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^{100}\left[\frac{1}{100}\,\frac{1}{60}(-60)e^{-\frac{y}{60}}\right]_0^x dx = \int_0^{100} -\frac{1}{100}\,e^{-\frac{x}{60}} + \frac{1}{100}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{100}(-60)e^{-\frac{x}{60}} + \frac{1}{100}x\right]_0^{100} = 0.6e^{-\frac{100}{60}} + 1 - 0.6 \simeq$$

$$\simeq 0.5133$$

Επομένως, $P(Y>X) = 1 - P(X>Y) \simeq 0.4867$

Σημείωση: Απλώς κοιτάζοντας τις αναμενόμενες τιμές, θα λέγαμε ότι είναι πιο πιθανό η Μαρία να ρίξει πιο μακριά. Όμως, τελικά βρήκαμε ότι η πιθανότητα να ρίξει παραπάνω ο Κώστας είναι ελαφρώς υψηλότερη.

v) $f_{Y|X}(y|75) = f_Y(y)$, αφού οι τιμές X και Y είναι ανεξ.

Πρόβλημα 3

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού σ.π.π.:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{C}, & -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(i) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X.

(ii) Υπολογίστε τη σταθερά C.

(iii) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. Y δεδομένης της X, $f_{Y|X}(y|x)$.

(iv) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y \ge 1)$.

Λύση:

i) Το πεδίο ορισμού της f_X είναι το διάστημα $[-1,1]$.
Για $-1 \le x \le 1$ είναι,

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{xy+1}{C}\,dy = \left[\frac{xy^2}{2C} + \frac{y}{C}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{C}$$

Συνεπώς,

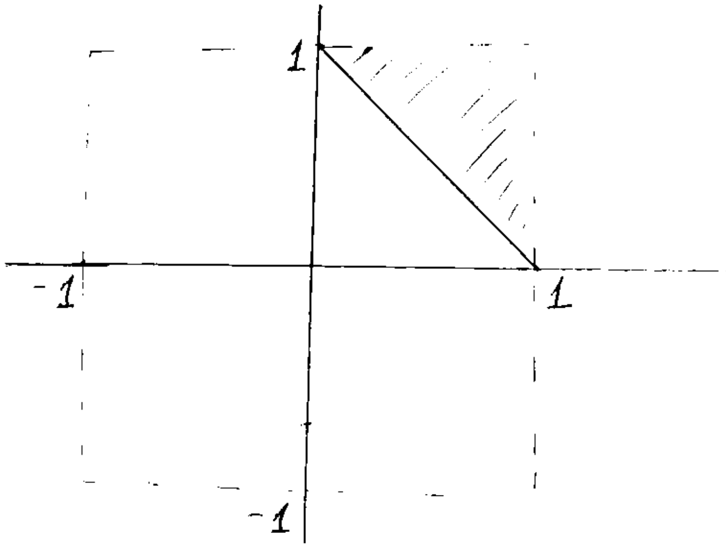
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{C}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

που σημαίνει ότι η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-1,1]$.

ii) Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{2}{C} = 1 \Rightarrow \frac{2}{C}\cdot 2 = 1 \Rightarrow C = 4$

iii) $$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{xy+1}{4}}{\frac{2}{4}} = \dfrac{xy+1}{2}, & -1 \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

iv) Φτιάχνουμε το σχήμα που συμβολίζει το γεγονός $\{X+Y \geq 1\}$:



Η ζητούμενη πιθανότητα αντιστοιχεί με το ολοκλήρωμα στη γραμμοσκιασμένη περιοχή. Έχουμε λοιπόν:

$$P\{X+Y \geq 1\} = \int_0^1 \int_{1-x}^1 \frac{xy+1}{4}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{8} + \frac{y}{4}\right]_{1-x}^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{x(1-x)^2}{8} - \frac{1-x}{4}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{8} - \frac{x(1-2x+x^2)}{8} + \frac{x}{4}\,dx = \int_0^1 \frac{-x^3+2x^2+2x}{8}\,dx =$$

$$= \frac{17}{96} = 0.1771$$

Πρόβλημα 4

Δύο σταθμοί Α και Β συνδέονται μεταξύ τους με δύο παράλληλα κανάλια επικοινωνίας 1 και 2. Στέλνουμε συγχρόνως μέσω και των δύο καναλιών ένα μήνυμα από το σταθμό Α στο σταθμό Β. Οι τ.μ. X και Y μοντελοποιούν την χρονική καθυστέρηση (σε ώρες) παραλαβής του μηνύματος μέσω των καναλιών 1 και 2, αντίστοιχα. Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ένα μήνυμα θεωρείται ότι έχει ληφθεί όταν φτάνει στο σταθμό Β μέσω οποιουδήποτε από τα δύο κανάλια, ενώ θεωρείται ότι έχει επαληθευθεί όταν φτάνει στο σταθμό Β μέσω και των δύο καναλιών.

(i) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί αλλά όχι επαληθευθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;

Λύση:

i) Αφού οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων θα είναι:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} \cdot \frac{1}{1-0} = 1, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

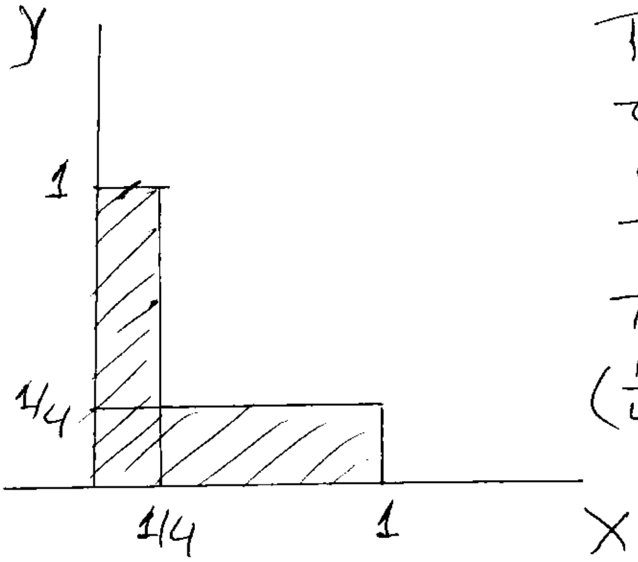
Ορίζουμε το γεγονός R_1 όταν $X \le 0.25$ και το γεγονός R_2, όταν $Y \le 0.25$ $\left(15min = \frac{1}{4} h\right)$

Ένα μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15min από τον Β, αν ο Α έστειλε δύο μηνύματα και τουλάχιστον ένα από τα R_1 και R_2 συνέβει.

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα μεταφράζεται ως εξής:

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2) \underset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=}$$
$$= P\left(X \le \frac{1}{4}\right) + P\left(Y \le \frac{1}{4}\right) - P(R_1) \cdot P(R_2) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

Εναλλακτικά, η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί από τη συνολική γραμμοσκιασμένη περιοχή του παρακάτω σχήματος:



Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι το εμβαδόν του οριζόντιου ορθογωνίου είναι $\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$. Το ίδιο και του κάθετου. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Επομένως, η ζητούμενη πιθ. υπολογίζεται πάλι ως $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2$

ii) Έστω C το γεγονός ότι ένα μήνυμα λαμβάνεται εντός 15min, αλλά δεν επιβεβαιώνεται.

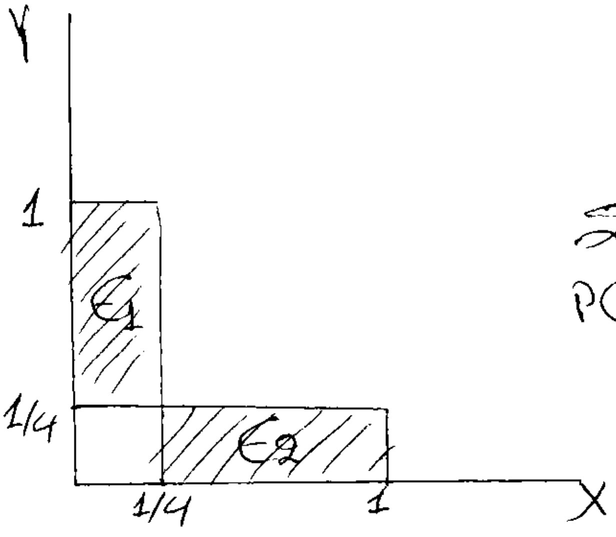
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος η ζητούμενη πιθανότητα μεταφράζεται ως εξής:

$$P(C) = P(R_1 \cap R_2') + P(R_1' \cap R_2) \underset{}{\overset{R_1, R_2 \text{ ανεξ.}}{=\!=}}$$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2') + P(R_1') \cdot P(R_2) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Διαφορετικά, μπορούμε πάλι να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα από το συνολικό εμβαδόν της παρακάτω γραμμοσκιασμένης επιφάνειας:



Σε αυτή την περίπτωση έχουμε λοιπόν:

$$P(C) = E_1 + E_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$