Τμημα Επιστημης Υπολογιστων, Πανεπιστημιο Κρητης

ΗΥ-217: Πιθανότητες
8ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Καράλας Κώστας

5 Δεκεμβρίου 2014

Πρόβλημα 1

Έστω η συνεχής τ.μ. X_n με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f(x_n) = \begin{cases} 0.7n, & 0 \leq x_n < 1/n \\ 0.3n, & 2 \leq x_n < 2 + 1/n. \end{cases}$$

Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.χ.) και δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. και της α.σ.χ. της X_n για $n = 1, 5$.

Λύση:

Η X_n είναι μία τμηματικά ομοιόμορφη συνεχής τ.μ. με πεδίο τιμών $[0, 1/n) \cup [2, 2+1/n)$.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (CDF) της X_n είναι: $F_{X_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(t)\,dt$

- $x_n \leq 0$: $F_{X_n}(x_n) = 0$
- $x_n \in [0, 1/n]$: $F_{X_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x_n} 0.7n\,dt = 0.7n x_n$
- $x_n \in [1/n, 2]$: $F_{X_n}(x_n) = \int_{0}^{1/n} 0.7n\,dt + \int_{1/n}^{x_n} 0\,dt = 0.7$
- $x_n \in [2, 2+\frac{1}{n}]$: $F_{X_n}(x_n) = \int_{0}^{1/n} 0.7n\,dt + \int_{2}^{x_n} 0.3n\,dt =$

  $= 0.7 + 0.3n(x_n - 2)$

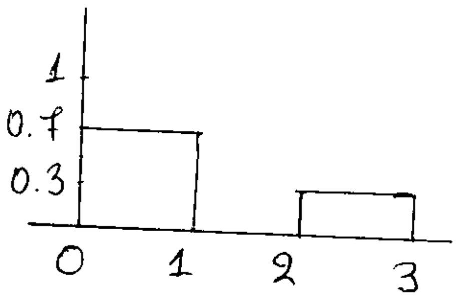
- $x_n \in [2+\frac{1}{n}, x_n]: F_{x_n}(x_n) = \int_0^{1/n} 0.7n\,dt + \int_2^{2+\frac{1}{n}} 0.3n\,dt =$

$$= 0.7 + 0.3 = 1$$

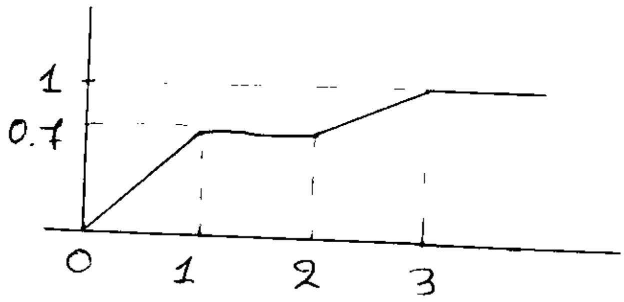
Άρα,

$$F_{x_n}(x_n) = \begin{cases} 0 & , x_n \le 0 \\ 0.7n x_n & , 0 \le x_n \le 1/n \\ 0.7 & , 1/n \le x_n \le 2 \\ 0.7 + 0.3n(x_n - 2) & , 2 \le x_n \le 2 + 1/n \\ 1 & , 2 + 1/n \le x_n \end{cases}$$

Για $n=1$, οι γραφικές παραστάσεις της PDF και της CDF θα είναι:

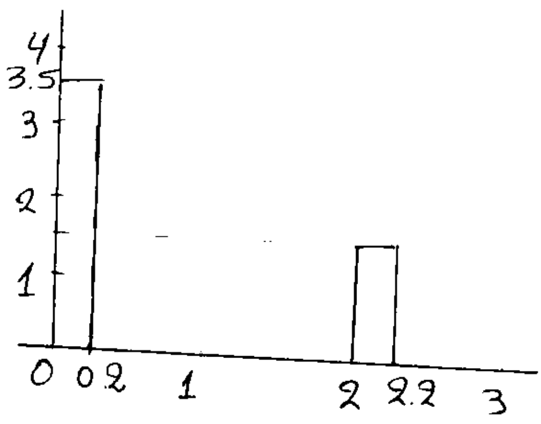


PDF

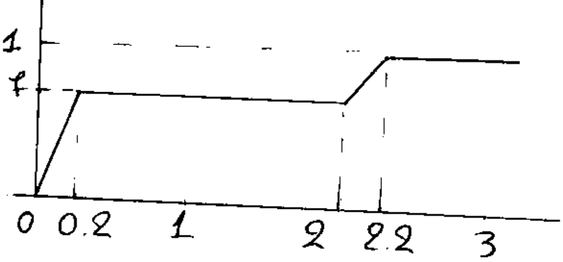


CDF

Για $n=5$, οι αντίστοιχες γραφικές θα είναι:



PDF



CDF

Πρόβλημα 2

Έστω X μικτή τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των ωρών που αφιερώνει κάποιος φοιτητής κάθε εβδομάδα στο ΗΥ-217. Η α.σ.κ. της X είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1+x}{8}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{8}, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & \geq 4. \end{cases}$$

Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$. Βρείτε την πιθανότητα ότι ο φοιτητής

(i) αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες,

(ii) αφιερώνει περισσότερες από 2 ώρες,

(iii) αφιερώνει λιγότερες από 2 ώρες,

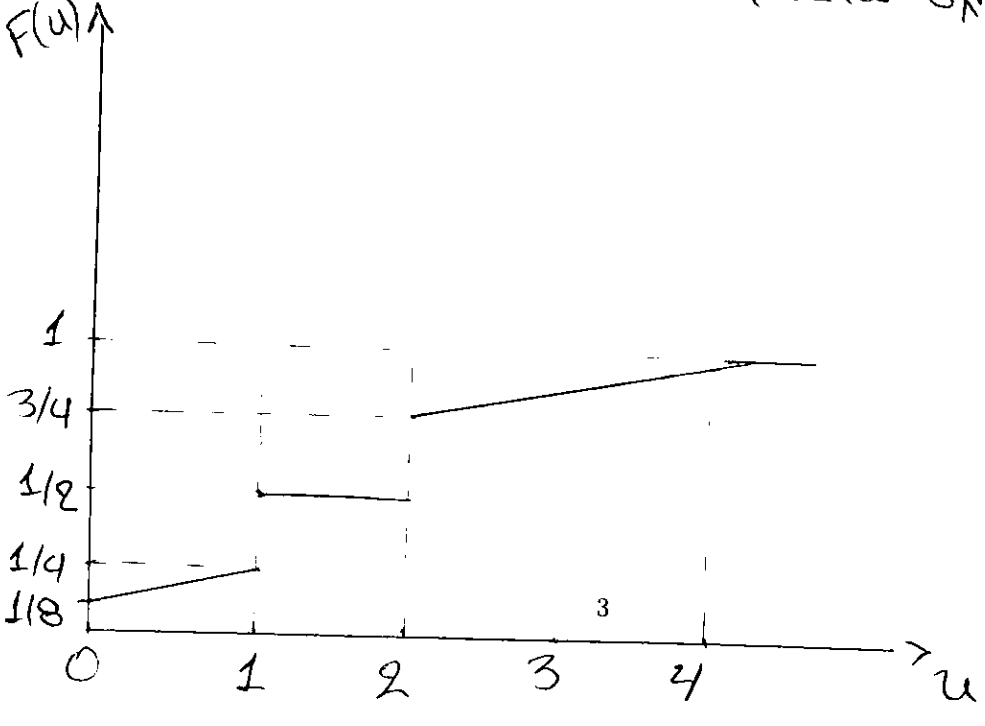
(iv) αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες,

(v) αφιερώνει περισσότερο από 1/2 αλλά λιγότερο από 3 ώρες,

(vi) αφιερώνει περισσότερες από 2 ώρες δεδομένου ότι πράγματι ασχολείται με το μάθημα, δηλαδή $P(X > 2|X > 0)$.

Λύση:

Η $F_X(u)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



i) $P(\text{"αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες"}) = P(X=2) =$

$= F_X(2) - F_X(2^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ii) $P(\text{"αφιερώνει περισσότερες από 2 ώρες"}) = P(X>2) =$

$= 1 - F_X(2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

iii) $P(\text{"αφιερώνει λιγότερες από 2 ώρες"}) = P(X<2) =$

$= F_X(2^-) = \frac{1}{2}$

iv) $P(\text{"αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες"}) = P(X=3) =$

$= F_X(3) - F_X(3^-) = 0$

v) $P(\text{"αφιερώνει πάνω από 1/2 και λιγότερο από 3 ώρες"}) =$

$= P(1/2 < X < 3) = F_X(3^-) - F_X((1/2)) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1+\frac{1}{2}}{8} = \frac{11}{16}$

vi) $P(\text{"αφιερώνει πάνω από 2 ώρες δεδομένου ότι πράγματι ασχολ."}) =$

$= P(X>2 \mid X>0) = \frac{P(X>2) \cap P(X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(X>2)}{P(X>0)} = \frac{1-F_X(2)}{1-F_X(0)} =$

$= \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{4 \cdot 7} = \frac{2}{7}$

Πρόβλημα 3

Η συνεχής τ.μ. X έχει σ.π.π.:

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1 - 0.1|x|), & -10 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a μια σταθερά.

(i) Δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και υπολογίστε το a.

(ii) Υπολογίστε την α.σ.κ της X και δώστε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

i) Το εμβαδόν κάτω από την $f_X(x)$ πρέπει να είναι μονάδα. Άρα,

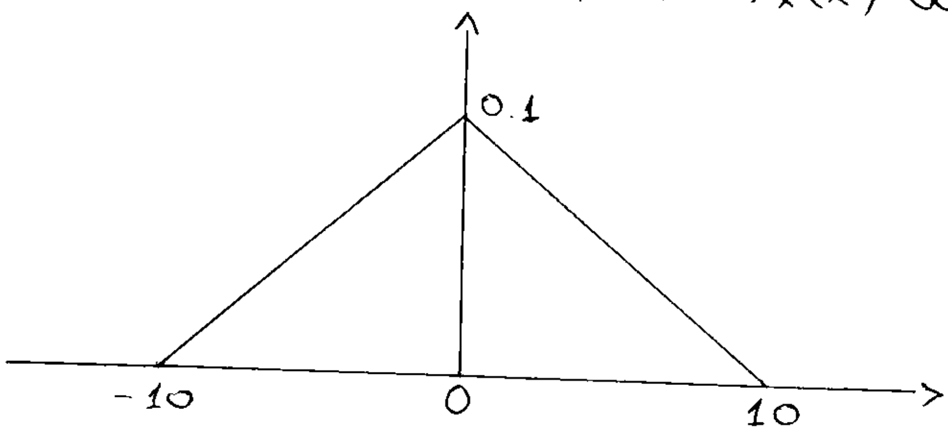
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-10}^{0} a(1+0.1x)dx + \int_{0}^{10} a(1-0.1x)dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ax + 0.1a\frac{x^2}{2}\right]_{-10}^{0} + \left[ax - 0.1a\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{10} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(-10a + 5a) + (10a - 5a) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10a = 1 \Leftrightarrow a = 0.1$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ θα είναι:



ii) Από τον ορισμό, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής θα είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

- $x < -10$: $F_X(x) = 0$
- $x \in [-10,0]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-10} 0\,dt + \int_{-10}^{x} 0.1(1+0.1t)\,dt =$

$$= \left[0.1t + 0.01\frac{t^2}{2}\right]_{-10}^{x} = 0.1x + 0.005x^2 - (-1+0.5) =$$

$$= 0.1x + 0.005x^2 + 0.5 = 0.005(x+10)^2$$

- $x \in [0,10]$: $F_X(x) = \int_{-10}^{0} 0.1(1+0.1t)\,dt + \int_{0}^{x} 0.1(1-0.1t)\,dt =$

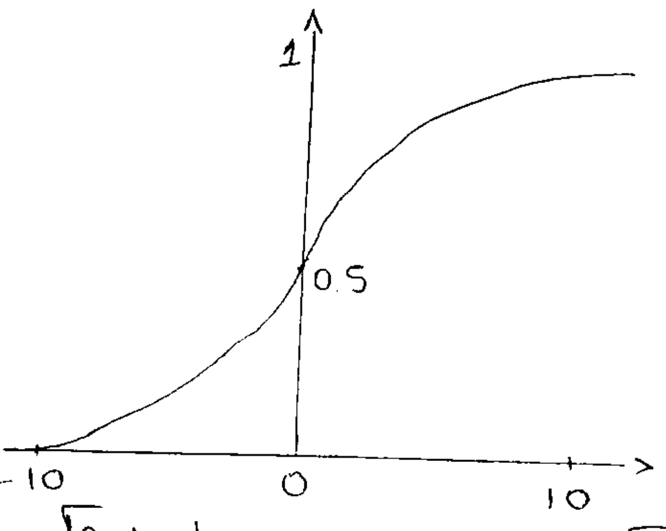
$$= \left[0.1t + 0.01\frac{t^2}{2}\right]_{-10}^{0} + \left[0.1t - 0.01\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} =$$

$$= -(-1+0.5) + 0.1x - 0.005x^2 =$$

$$= 0.1x - 0.005x^2 + 0.5 = 1 - 0.005(x-10)^2$$

- $x > 10$: $F_X(x) = \int_{-10}^{0} 0.1(1+0.1t)\,dt + \int_{0}^{10} 0.1(1-0.1t)\,dt + \int_{10}^{x} 0\,dt =$

$$= 0.5 + 0.5 = 1$$



Γραφική παράσταση της $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -10 \\ 0.005(x+10)^2 & , x \in [-10,0] \\ 1 - 0.005(x-10)^2 & , x \in [0,10] \\ 1 & , x > 10 \end{cases}$$

Πρόβλημα 4

Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$, δηλαδή: $X \sim \mathcal{N}(2, 100)$.

(i) $P(|X| < 8) =;$

(ii) $E[(X-4)^2] =;$

Λύση:

i) $$P(|X|<8) = P(-8<X<8) = P(X<8) - P(X<-8) =$$

$$= P\left(\frac{X-2}{10} < \frac{8-2}{10}\right) - P\left(\frac{X-2}{10} < \frac{-8-2}{10}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right) = \Phi(0.6) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1$$

ii) $$E[(X-4)^2] = E[X^2 - 8X + 16] =$$

$$= E[X^2] - 8E[X] + 16 = \mathrm{var}(X) + E^2[X] - 8E[X] + 16 =$$

$$= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104$$

Σημειώσεις: 1. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

2. $\mathrm{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Πρόβλημα 5

Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα $500gr$. είναι τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim \mathcal{N}(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των $500gr$. Ποια είναι η πιθανότητα:

(i) Ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον $490gr$ καφέ;

(ii) Το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και $505gr$;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της α.σ.χ. της τυπικής Γκαουσιανής.

Λύση:

Ισχύει: $X \sim N(500,25) \Rightarrow Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0,1)$

i) $P(X \geq 490) = P\left(\frac{X-500}{5} \geq \frac{490-500}{5}\right) =$

$= P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) =$

$= \Phi(2) = 0.9772$

Επομένως,

P("1 από τα 3 πακέτα έχει βάρος ≥ 490") =

$= \binom{3}{1} 0.9772^1 (1-0.9772)^2 = 0.001524$ (διωνυμική)

ii) $P(490 \leq X \leq 505) = P\left(\frac{490-500}{5} \leq \frac{X-500}{5} \leq \frac{505-500}{5}\right) =$

$= P(-2 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 =$

$= 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185$

Επομένως,

P("και τα 3 πακέτα είναι μεταξύ 409 και 505gr") =

$= (0.8185)^3 = 0.54837$