

7^ο Φροντιστήριο Πιθανότητες ΗΥ-217
Επαναληπτικές Ασκήσεις Προόδου
Επιμέλεια: Κωνσταντίνος Φωτιάδου

Άσκηση 1

Είναι χειμώνας στο Ηράκλειο και δύο συμφουλιτές και συγγάτοικοι, ο Κώστας και ο Νίκος, αποφασίζουν να παίξουν το εξής παιχνίδι.

Ο Νίκος θα ρίξει διαδοχικά 4 φορές ένα κέρρα (πιθανότητα κεφαλής ίση με 0,4).

Πριν τις ρίψεις θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ 2 επιλογών:

i) να κερδίσει σε ευρώ ποσό X , 100 με το πλήθος των κεφαλών που θα φέρει

ή

ii) να κερδίσει σε ευρώ ποσό Y , 100 με το τετράγωνο του πλήθους των κεφαλών μείον 1,5 φορές το πλήθος των κεφαλών που θα φέρει.

α) Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για το Νίκο; Δηλαδή ποια στρατηγική μεγιστοποιεί το μέσο αναμενόμενο κέρδος του;

β) Στη γενική περίπτωση, όπου η πιθανότητα να έρθει κεφαλή είναι p , για ποιο εύρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική i) από την ii);

1

Απάντηση:

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που προσδιορίζει το πλήθος των κεφαλαίων σε 4 ρίψεις του κέρματος. Προφανώς

Η πιθανότητα να φέρει κεφαλή σε 4 διαφορετικές ρίψεις είναι $p=0,4$.

Επομένως, η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=4$ και $p=0,4$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$P_X(k) = \binom{4}{k} (0,4)^k \cdot (1-0,4)^{n-k}$$

$$\Rightarrow P_X(k) = \binom{4}{k} \cdot (0,4)^k \cdot (0,6)^{n-k}, \quad k=0,1,2,3,4,\dots$$

Σύμφωνα με την στρατηγική (i), το κέρδος του Νίκου θα είναι $\boxed{X}$

Ενώ, σύμφωνα με την στρατηγική (ii) το κέρδος του Νίκου θα είναι:

$$\boxed{Y = X^2 - 1,5 \cdot X}$$

(a) Βρισκουμε για κάθε στρατηγική την μέση τιμή του κέρδους.

Έχουμε:

$$\bullet E[X] = n \cdot p = 4 \cdot 0,4 = 1,6 \Rightarrow \boxed{E[X] = 1,6}$$

$$\bullet E[Y] = E[X^2 - 1,5 \cdot X] = E[X^2] - 1,5 \cdot E[X].$$

$$\underline{\text{Όπως:}} \quad \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2$$

Η διασπορά της τ.μ. X δίνεται από:
 $\text{var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,96.$

Άρα: $E[X^2] = 0,96 + 1,6^2 = 3,52$

Επομένως:

$$E[Y] = E[X^2] - 1,5 \cdot E[X] = \\ = 3,52 - 1,5 \cdot 1,6 = 1,12$$

$\Rightarrow$ $E[Y] = 1,12$

Έχουμε ότι: $E[X] > E[Y]$

Επομένως, η στρατηγική i) είναι πιο συμφέρουσα.

Ⓔ Η στρατηγική i) είναι πιο συμφέρουσα από την ii) στη γενική περίπτωση:

$$E[X] > E[Y]$$

$$\Rightarrow n \cdot p > E[X^2] - 1,5 \cdot E[X]$$

$$\Rightarrow n \cdot p > \text{var}(X) + (E[X])^2 - 1,5 \cdot np$$

$$\Rightarrow n \cdot p > n \cdot p \cdot (1-p) + (n \cdot p)^2 - 1,5 \cdot np$$

$$\Rightarrow n \cdot p + 1,5 \cdot n \cdot p > n \cdot p \cdot (1-p) + (np)^2$$

$$\Rightarrow 2,5 np > n \cdot p \cdot (1-p) + (np)^2$$

$$\Rightarrow 2,5 np > np - np^2 + n^2 \cdot p^2$$

$$\Rightarrow 2,5 np - np > np^2 \cdot (-1 + n)$$

$$\Rightarrow 1,5 \cdot n \cdot p > n \cdot p^2 \cdot (n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot p - p^2 \cdot (n-1) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot p + (1-n) \cdot p^2 > 0$$

$n=4$ $\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot p + (1-4) \cdot p^2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot p - 3p^2 > 0$$

$$\Rightarrow 3p \cdot \left(\frac{1}{2} - p \right) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - p > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > p \Rightarrow p < \frac{1}{2}$$

Apa:

$$0 < p < \frac{1}{2}$$

Άσκηση 2

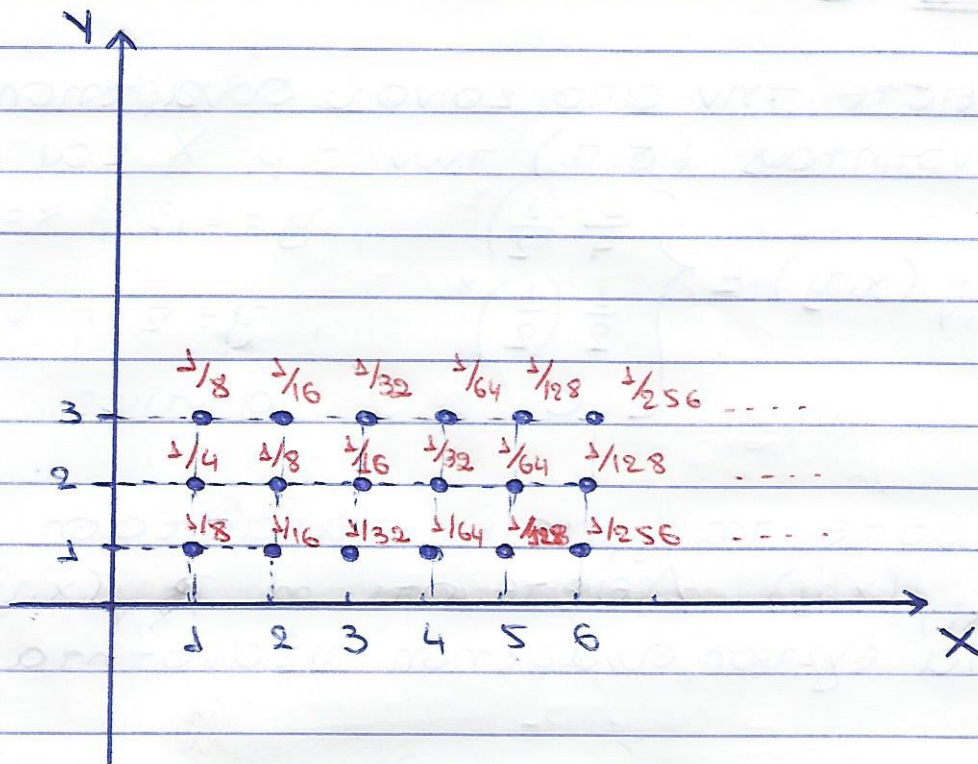
Θεωρείστε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) των τ.μ. X και Y :

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & y=1,3; \quad x=1,2,3,\dots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & y=2; \quad x=1,2,3,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $P_{X,Y}(x,y)$. Δείξτε ότι η $P_{X,Y}(x,y)$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.
- β) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $P_X(x)$ και $P_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα.
- γ) Αναγνωρίστε το όνομα της κατανομής της τ.μ. X και την παράμετρο αυτής. Βρείτε τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά της $\text{var}(X)$.
- δ) Έστω $Z = 2X + Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή $E[Z]$ και τη διασπορά $\text{var}(Z)$ της Z .
- ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. $P_{Z|X}(z|x)$.

Απάντηση:

α)



Για να δείξουμε ότι η $P_{x,y}(x,y)$ είναι έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας αρκεί:

- $0 < P_{x,y}(x,y) < 1, \forall (x,y)$

και

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \sum_{x=1}^{+\infty} \sum_{y=1}^3 P_{x,y}(x,y) &= \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \\
 &\quad + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1/2}{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1/2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1/2}{1/2} = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

©

Άρα, η $P_{X,Y}(x,y)$ είναι έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

8) Περιθωριακές σ.π.:

$$\begin{aligned} \bullet P_X(x) &= \sum_{y=1}^3 P_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x=1,2,\dots \end{aligned}$$

$$\bullet P_Y(y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x, & y=1,3 \\ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x, & y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{1/2}{1-1/2}, & y=1,3 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1-1/2}, & y=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_Y(y) = \begin{cases} 1/4, & y=1,3 \\ 1/2, & y=2 \end{cases}$$

⑧ Η τ.ρ. X είναι γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/2$.

Έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Επομένως θα έχει μέση τιμή της μορφής:

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{p} = 2}$$

και Διασπορά: $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-1/2}{1/4}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{var}(X) = 2}$$

⑧ $Z = 2 \cdot X + Y^2$, η μέση τιμή υπολογίζεται από:
 $E[Z] = 2 \cdot E[X] + E[Y^2]$

Όμως, θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα το $E[Y^2]$.

Έχουμε:

$$\bullet E[Y] = 1^1 \cdot \frac{1}{4} + 3^1 \cdot \frac{1}{4} + 2^1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\bullet E[Y^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

• Άρα:

$$\begin{aligned} \underline{E[Z]} &= 2 \cdot E[X] + E[Y^2] = \\ &= 2 \cdot 2 + \frac{9}{2} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

- Η διασπορά της τ.μ. Z γίνεται:

$$\begin{aligned}\text{var}(Z) &= \text{var}(2X + Y^2) = \text{var}(2X) + \text{var}(Y^2) = \\ &= 2^2 \cdot \text{var}(X) + \text{var}(Y^2) \\ &= 4 \cdot \text{var}(X) + \text{var}(Y^2) \\ &= 4 \cdot 2 + \text{var}(Y^2)\end{aligned}$$

όπως: $\text{var}(Y^2) = E[Y^4] - (E[Y^2])^2$
 $\Rightarrow \text{var}(Y^2) = E[Y^4] - \left(\frac{9}{2}\right)^2$

Έχουμε: $E[Y^4] = 1^4 \cdot \frac{1}{4} + 3^4 \cdot \frac{1}{4} + 2^4 \cdot \frac{1}{2} =$
 $= \frac{57}{2}$

Επομένως: $\text{var}(Y^2) = \frac{57}{2} - \frac{81}{4} = \frac{33}{4}$

$\text{var}(Z) = \frac{8}{1} + \frac{33}{4} = \frac{32+33}{4} = \frac{65}{4}$

Ε $P_{Z|X}(z|x=1) = P(\{Z=z\} | \{X=1\}) =$
 $= P(\{2X + Y^2 = z\} | \{X=1\}) =$
 $= P(\{2 + Y^2 = z\}) = \begin{cases} 1/4 & z=3, 11 \\ 1/2 & z=6 \end{cases}$

Σημείωση

- ⊛ Η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές
 $1, 3, 2$ με πιθανότητες
 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

Άσκηση 3

Παίζω 2 παιχνίδια τένις τριών σετ, που σημαίνει ότι κερδίζω αν πάρω τα 2 από τα 3 σετ. Είμαι καλός παίκτης αλλά εκτός φόρμας και παίρνω το 1^ο, το 2^ο ^{και} το 3^ο σετ με πιθανότητες: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ αντιστοίχα.

Κερδίζω το 2-οστό σετ ανεξάρτητα από το τι θα έκανα ή θα κάνω στα υπόλοιπα σετ.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα κερδίσω το παιχνίδι;
- (β) Έστω η τ.μ. X που συμβολίζει τον αριθμό του 1^{ου} σετ που παίρνω. Υποθέστε ότι η X παίρνει την τιμή 0 αν χάσω και στα 3 σετ. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας και τη μέση τιμή της X .
- (γ) Έστω η τ.μ. Y που συμβολίζει το πλήθος των σετ που παίζονται. Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας και τη μέση τιμή της Y .

Βοήθεια: Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα για το παρακάτω φύλλο.

Απάντηση

Ενδεχόμενο	Πιθανότητα	Κερδίζω?	Τύπη X	Τύπη Y
WW	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$	ΝΑΙ	1	2
WLW	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	ΝΑΙ	1	3
LWW	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$	ΝΑΙ	2	3
LL	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	ΟΧΙ	0	2
LWL	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$	ΟΧΙ	2	3
WLL	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	ΟΧΙ	1	3

Έστω: $W = \{ \text{κερδίζω το σέτ} \}$
 $L = \{ \text{χάνω το σέτ} \}$

(α) $P(\text{κερδίζω το παιχνίδι}) = P(WW) + P(WLW) + P(LWW) =$
 $= \frac{6}{18} + \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(β) Εξουτέ:

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , k=0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} & , k=1 \\ \frac{1}{18} + \frac{1}{9} & , k=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow P_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , k=0 \\ \frac{2}{3} & , k=1 \\ \frac{1}{6} & , k=2 \end{cases}$

Μέση Τύπη: $E[X] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1$

$\Rightarrow E[X] = 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\Rightarrow \boxed{E[X] = 1}$

$$\textcircled{8} \quad P_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, & k=2 \\ \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}}, & k=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k=2 \\ \frac{1}{2}, & k=3 \end{cases}$$

Οπότε: $E[Y] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$

$$\Rightarrow \boxed{E[Y] = 2,5}$$

Άσκηση 4

Στις επόμενες 5 προτάσεις αντικαταστήστε το v.s. με κάποιο από τα σύμβολα $=, <, >$. Αλτιοτροχηστε.

α) $1 - P(A \cup B^c)$ v.s. $P(B) - P(A \cap B)$

β) $P(A|B)$ v.s. $\frac{P(B|A)}{P(B)}$

γ) $P(A \cup B)$ v.s. $P(A) + P(B) \cdot P(A^c)$, όταν A, B ανεξάρτητα.

δ) $P_X(x)$ v.s. 1

ε) $E[X^2]$ v.s. $(E[X])^2$.

Απάντηση:

α) $1 - P(A \cup B^c) = P(B) - P(A \cap B)$

Διότι: Από τους κανόνες De Morgan έχουμε:

$$1 - P(A \cup B^c) = P((A \cup B^c)^c) = P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

β) $P(A|B) < \frac{P(B|A)}{P(B)}$

Διότι:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} <$$

$$< \frac{P(B|A)}{P(B)}, \text{ διότι: } P(A) < 1$$

8

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \cdot P(A^c)$$

A, B : ανεξάρτητα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(A) + P(B) \cdot (1 - P(A))$$

$$= P(A) + P(B) \cdot P(A^c)$$

8

$$P_X(x) \leq 1$$

Οι τιμές της συνάρτησης πιθανότητας θα πρέπει να είναι ≤ 1 ως πιθανότητες γεγονότων.

ε

$$E[X^2] \geq (E[X])^2, \text{ διότι:}$$

$$0 \leq \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$