6ο Φροντιστήριο - Πιθανότητες

Παρασκευή 14/11/2014

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

Επαναληπτικές Ασκήσεις Προόδου

1 Η Σοφία περνά μπροστά από 1 κουτί που περιέχει 2 ειδών σοκολάτες:

- ΙΟΝ γάλακτος
- ΙΟΝ αμυγδάλου

Στο κουτί υπάρχουν 3 φορές περισσότερες ΙΟΝ γάλακτος από ΙΟΝ αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μια σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μια ΙΟΝ γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα 1/5. Αν επιλέξει μια ΙΟΝ αμυγδάλου την τρώει με πιθανότητα 2/5.

α) Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει την σοκολάτα που επέλεξε;

β) Δεδομένου ότι η Σοφία έφαγε τη σοκολάτα, ποια η πιθανότητα ότι αυτή ήταν μια ΙΟΝ αμυγδάλου;

Απάντηση:

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{$ Η σοκολάτα είναι ΙΟΝ γάλακτος $\}$

$B = \{$ Η Σοφία τρώει τη σοκολάτα $\}$

$A^c = \{$ Η σοκολάτα είναι ΙΟΝ αμυγδάλου $\}$

Έχουμε:

$P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A^c) = \frac{1}{4}$

$P(B|A) = \frac{1}{5}$ => Η πιθανότητα να τρώει μια σοκολάτα ΙΟΝ γάλακτος

$P(B|A^c) = \frac{2}{5}$ => Η πιθανότητα να τρώει μια σοκολάτα ΙΟΝ αμυγδάλου.

(α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{P(B) = 0{,}25}$

(β) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι η σοκολάτα ήταν ΙΟΝ αμυγδάλου δεδομένου ότι η Σοφία την έφαγε, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes:

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c) \cdot P(B|A^c)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{4}} \cdot \frac{2}{5}}{\cancel{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$\Rightarrow \boxed{P(A^c|B) = 0{,}4}$

(2) Μια εταιρία παραγωγής ηλεκτρονικών συσκευών αγοράζει 1 εκατομμύριο αντιστάσεις από 3 διαφορετικούς προμηθευτές:

20% αγοράζονται από τον A
30% -״- -״- -״- B
50% -״- -״- -״- C

Από τις αντιστάσεις που αγοράζονται 1 ποσοστό είναι ελαττωματικές ανάλογα με τον προμηθευτή.
5% των αντιστάσεων του προμηθευτή A είναι ελαττωματικές. 1% των αντιστάσεων του προμηθευτή B είναι ελαττωματικές.
2% του προμηθευτή C είναι ελαττωματικές.
Επιλέγουμε 1 από τις αντιστάσεις στην τύχη.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματική δεδομένου ότι προέρχεται από τον B;
$P(E|B) = ;$

(β) Ποια η $P(E)$ = πιθανότητα να είναι ελαττωματική;

(γ) Ποια η $P(B|E)$ = πιθανότητα να προέρχεται από τον B δεδομένου ότι είναι ελαττωματική;

$\boxed{\text{ΛΥΣΗ}}$

(α) $\underline{P(E|B)} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

(β) $\underline{P(E)} = P(A)\cdot P(E|A) + P(B)\cdot P(E|B) + P(C)\cdot P(E|C) =$
$= 0{,}2\cdot 0{,}05 + 0{,}3\cdot 0{,}01 + 0{,}5\cdot 0{,}02 =$
$= 0{,}023$

(γ) $\underline{P(B|E)} = \frac{P(E|B)\cdot P(B)}{P(E)} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}3}{0{,}023} =$
$= \boxed{\frac{3}{23}}$

(3) Έστω X διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους $(10, p)$. Να υπολογισθούν:

(α) (i) Η πιθανότητα η X να πάρη την τιμή 2.

(ii) Η διασπορά της τ.μ. $3X+2$.

(β) Έστω X: Poisson τ.μ.

Αν $E[X]=3$, ποια είναι η μέση τιμή της $Y=(X-2)^2$;

ΛΥΣΗ

(α)

(i) $$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{10-2} = \frac{10!}{2!\,8!} p^2 \cdot (1-p)^8 =$$
$$= 45 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$$

(ii) $$var(3X+2) = 3^2 \cdot var(X) = 9 \cdot 10 \cdot p \cdot (1-p) =$$
$$= 90 \cdot p \cdot (1-p)$$

(β) Για μια Poisson τ.μ. γνωρίζουμε:

$$E[X] = var(X) = \lambda = 3$$

<u>Άρα</u>: $E[Y] = E[(X-2)^2] = E[X^2 - 4X + 4] =$

<u>Θυμόμαστε</u>

$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$$= \boxed{E[X^2]} - 4 \cdot E[X] + 4 =$$
$$= Var(X) + E[X]^2 - 4 \cdot E[X] + 4 =$$
$$= \lambda + \lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 4$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + 4 =$$
$$= \cancel{3}^2 - \cancel{3}\,3 + 4 = 4$$

4 Υπολογίστε το $E[X^2]$ για μια Poisson τ.μ.

α) με μέση τιμή 5.

β) Αν Y είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 4, να υπολογισθεί το $var(2-3Y)$.

γ) Η τ.μ. Z δηλώνει τον αριθμό των εμφανίσεων 1 γεγονότος A, με πιθανότητα εμφάνισης p, σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές.
Ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Z δεδομένου ότι το γεγονός A εμφανίστηκε 4 φορές στις πρώτες 6 δοκιμές;

ΛΥΣΗ

α) Για μια Poisson τ.μ. γνωρίζουμε ότι:

$E[X] = \lambda$ και $var[X] = \lambda$.

$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$\Rightarrow \quad 5 = E[X^2] - 5^2$

$\Rightarrow \quad \boxed{E[X^2] = 30}$

β) Για μια γεωμετρική τ.μ. Y ισχύει:

$E[Y] = 1/p$ και $var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

Άρα: $\boxed{var(2-3Y)} = (-3)^2 \cdot var Y = 9 \cdot \left(\frac{1-p}{p^2}\right) =$

$= 9 \cdot \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}} = 9 \cdot \frac{3/4}{1/16} = 9 \cdot 12 =$

$= \boxed{108}$

(γ) Θεωρούμε την τ.μ. $Z \sim \Delta(n=10, p)$.

Η αδέσμευτη μέση τιμή της Z είναι:

$E[Z] = 10 \cdot p$.

Θεωρούμε επίσης την τ.μ. $Y \sim \Delta(n=4, p)$.

Δεδομένου του γεγονότος A έχουμε:

$Z = 4 + Y$.

Έχουμε 4 εμφανίσεις στις πρώτες 6 δοκιμές και Y εμφανίσεις στις 4 τελευταίες δοκιμές.

Οπότε:

$$E[Z|A] = 4 + E[Y] = 4 + 4p$$

(5) Ο Γιώργος, ο Χρήστος και ο Κώστας αποφασίζουν ποιος από τους 3 θα συνοδεύσει τη Μαρία στο σινεμά, με τον ακόλουθο τρόπο: καθένας ρίχνει 1 δίκαιο νόμισμα. Αν τα 2 από τα 3 νομίσματα φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα (π.χ. γράμματα) και το 3ο νόμισμα φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα (κορώνα), τότε αυτός που έριξε το τρίτο συνοδεύει τη Μαρία.
Διαφορετικά, αν και τα 3 νομίσματα φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα, απαιτείται νέος γύρος ρίψεων.

(α) Ορίστε το δειγματοχώρο του πειράματος και υπολογίστε την πιθανότητα σε κάποιο γύρο ρίψεων να ληφθεί απόφαση σχετικά με το ποιος συνοδεύει τη Μαρία.

(β) Ποια η πιθανότητα ότι απαιτούνται τουλάχιστον 3 γύροι ρίψεων για να ληφθεί η απόφαση;

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι λαμβάνεται η απόφαση σε ζυγό αριθμό γύρων;

(δ) Ποια η πιθανότητα ότι απαιτούνται τουλάχιστον 3 γύροι ρίψεων για να ληφθεί η απόφαση δεδομένου ότι η απόφαση λαμβάνεται σε ζυγό αριθμό γύρων;

ΛΥΣΗ

(α) Δειγματικός Χώρος:

$$\underline{\Omega} = \{(KKK), (KK\Gamma), (K\Gamma K), (\Gamma KK), (\Gamma\Gamma K), (\Gamma K\Gamma), (K\Gamma\Gamma), (\Gamma\Gamma\Gamma)\}$$

Όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Έχουμε: $P(KKK) = P(\Gamma\Gamma\Gamma) = \frac{1}{8}$

(Πιθανότητες να απαιτούνται νέες ρίψεις)

$\boxed{P(\text{απαιτείται νέος γύρος})} = P(KKK) + P(\Gamma\Gamma\Gamma) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

$= 1/4$

$\boxed{P(\text{λαμβάνεται απόφαση})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

β) Ο αριθμός των γύρων X που χρειάζονται μέχρι να ληφθεί η απόφαση ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με $p = 3/4$

Σύμφωνα με τον τύπο της γεωμετρικής κατανομής έχουμε: $(P_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p,\ k=1,2\ldots)$

$\boxed{P\{\text{τουλάχιστον 3 γύροι}\}} = P(X > 2) =$

$= 1 - P(X=1) - P(X=2) =$

$= 1 - (1-p)^{1-1} \cdot p - (1-p)^{2-1} \cdot p$

$= 1 - (1-p)^0 \cdot p - (1-p) \cdot p = 1 - p - p + p^2 =$

$= 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1/16$

γ) $P\{X \text{ ζυγός}\} = P(X=2) + P(X=4) + \ldots =$

θέτω: $\boxed{q = 1-p}$

$= p \cdot q + p \cdot q^3 + p \cdot q^5 + \ldots$

$= p \cdot q \cdot \underbrace{(1 + q^2 + q^4 + \ldots)}$ $=$

$= p \cdot q \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i = p \cdot q \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{q \cdot \cancel{(1-q)}}{\cancel{(1-q)}(1+q)} =$

$= \frac{q}{1+q} = \frac{1/4}{1+1/4} = \frac{1/4}{5/4} = \frac{1}{5}$

(δ) Έστω Q: Το ενδεχόμενο να απαιτούνται τουλάχιστον 3 γύροι ριψεων για να ληφθεί η απόφαση.

$$P\{Q>2 \mid X \text{ ζυγός}\} = \frac{P\{Q>2 \cap X \text{ ζυγός}\}}{P\{X \text{ ζυγός}\}} =$$

$$= \frac{P(X=4)+P(X=6)+\dots}{1/5} =$$

$$= \frac{(p\cdot q^3 + p\cdot q^5 + \dots)}{1/5} = \frac{\frac{1}{5} - P(X=2)}{\frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}} = 1/16$$