Τμημα Επιστημης Υπολογιστων, Πανεπιστημιο Κρητης

ΗΥ-217: Πιθανότητες
5ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Καράλας Κώστας

29 Οκτωβρίου 2014

Πρόβλημα 1

Παρακολουθείτε ένα βίντεο στο YouTube το οποίο περιέχει 30 καρέ το δευτερόλεπτο. Κάθε καρέ αποτελείται από 1000 πακέτα. Κάθε φορά που ένα καρέ αναπαράγεται στον υπολογιστή σας, αν 5 ή περισσότερα πακέτα αυτού του καρέ έχουν χαθεί (δηλαδή έχετε λάβει 995 ή λιγότερα πακέτα του καρέ), παρατηρείτε το λεγόμενο φαινόμενο του buffering (καθυστέρηση στην αναπαραγωγή του βίντεο). Κάθε πακέτο χάνεται με πιθανότητα $p = 0.001$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Υπολογίστε την πιθανότητα να παρατηρήσετε buffering.

Λύση:

Θεωρούμε μία δοκιμή Bernoulli, η οποία περιγράφεται από την πιθανότητα «επιτυχίας» $p = 0.001$ που αντιστοιχεί στο να χαθεί ένα πακέτο του καρέ και την πιθανότητα «αποτυχίας» $1 - p = 0.999$ που αντιστοιχεί στο να μεταδοθεί σωστά το πακέτο.

Ορίζουμε τη διακριτή τ.μ. X, η οποία μετρά το πλήθος των χαμένων πακέτων σε ένα καρέ (1000 πακέτα μεταδίδονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο). Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $(n, p) = (1000, 0.001)$, δηλαδή $X \sim B(1000, 0.001)$ και συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(X = x) = \binom{1000}{x}(0.001)^x(0.999)^{1000-x}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, αν έχουν χαθεί 5 ή περισσότερα πακέτα από ένα καρέ παρατηρείται buffering. Έστω λοιπόν το ενδεχόμενο: A = {παρατηρείται buffering}.
Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται τώρα ως εξής:

$$P(A) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{1000}{k} (0.001)^k (0.999)^{1000-k} = 0.003637$$

Πρόβλημα 2

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση υπέρ ή κατά. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, υπέρ με πιθανότητα p. Ορίζουμε το γεγονός M ότι η απόφαση του σώματος είναι υπέρ (δηλαδή η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε υπέρ), και το γεγονός A ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε υπέρ.

(i) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X που συμβολίζει τον αριθμό των δικαστών που ψηφίζουν υπέρ;

(ii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(M)$.

(iii) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(M/A)$.

(iv) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/M)$.

Λύση:

(i) Θεωρούμε μία δοκιμή Bernoulli η οποία περιγράφεται από την πιθανότητα «επιτυχίας» p που αντιστοιχεί στο να ψηφίσει ο δικαστής υπέρ, και την πιθανότητα «αποτυχίας» $1-p$ που αντιστοιχεί στο να ψηφίσει ο δικαστής κατά.
Η τ.μ. X συμβολίζει τον αριθμό των δικαστών που ψήφισαν υπέρ. Επειδή καθένας από τους 3 δικαστές ψηφίζει ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $(n, p) = (3, p)$, δηλαδή $X \sim B(3, p)$.

(ii) Επειδή το σώμα αποφασίζει πάντα κατά πλειοψηφία, προκύπτει ότι η απόφαση είναι υπέρ, αν τουλάχιστον 2 στους 3 δικαστές αποφασίσουν υπέρ. Έχουμε λοιπόν:

$$P(M) = P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 3p^2 - 2p^3$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} P(M) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - \left[(1-p)^3 + \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 \right] \\ &= \cdots = 3p^2 - 2p^3 \end{aligned}$$

(iii) Δεδομένου ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε υπέρ, η απόφαση του σώματος είναι υπέρ αν τουλάχιστον ακόμη ένας από τους άλλους 2 ψήφισαν υπέρ. Επομένως:

$$\begin{aligned} P(M\backslash A) &= \binom{2}{1}p(1-p) + \binom{2}{2}p^2(1-p^0) \\ &= \cdots = 2p - p^2 \end{aligned}$$

(iv) Ζητάμε την πιθανότητα του γεγονότος ο πρώτος δικαστής να ψηφίσει υπέρ, δεδομένου ότι το σώμα ψήφισε υπέρ. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$P(A\backslash M) = \frac{P(M\backslash A)P(A)}{P(M)} = \frac{p(2p-p^2)}{3p^2-2p^3} = \frac{2-p}{3-2p}$$

Υπενθύμιση 1: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Υπενθύμιση 2: Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes για να αντιστρέψουμε τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος, κάτι που μας οδηγεί τελικά σε πιθανότητες που έχουμε ήδη υπολογίσει..

Πρόβλημα 3

Ο Χάρης ο ψαροντουφεκάς χτυπάει ένα μεγάλο ψάρι όταν το δει κοντά του με πιθανότητα 0.4. Σε κάθε βουτιά που κάνει, βλέπει μεγάλο ψάρι στο 30% των περιπτώσεων. Μια μέρα που έχει μεγάλα κέφια κάνει 45 βουτιές. Ποια η πιθανότητα να χτυπήσει 10 μεγάλα ψάρια;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα: Α = {ο Χάρης χτυπάει μεγάλο ψάρι} και Β = {ο Χάρης βλέπει μεγάλο ψάρι}.

Τότε, από τα δεδομένα του προβλήματος καταλαβαίνουμε ότι ο Χάρης σε κάθε βουτιά θα «βγάλει» ένα μεγάλο ψάρι με πιθανότητα $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\backslash B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$.

Θεωρούμε μία δοκιμή Bernoulli, η οποία περιγράφεται από την πιθανότητα «επιτυχίας» $p = 0.12$ που αντιστοιχεί στο στο να χτυπήσει ο Χάρης μεγάλο ψάρι στη βουτιά του και την πιθανότητα «αποτυχίας» $1-p = 0.88$ που αντιστοιχεί στο να αστοχήσει και να μη χτυπήσει το ψάρι.

Ορίζουμε τη διακριτή τ.μ. X, η οποία μετρά το πλήθος των μεγάλων ψαριών που χτυπάει ο Χάρης στις 45 ανεξάρτητες βουτιές του. Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $(n,p) = (45, 0.12)$, δηλαδή $X \sim B(45, 0.12)$ και συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(X = x) = \binom{45}{x}(0.12)^x(0.88)^{10-x}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την παραπάνω PMF, βρίσκω ότι η πιθανότητα να χτυπήσει ο Χάρης 10 μεγάλα ψάρια είναι ίση με:

$$P(X=10)=\binom{45}{10}(0.12)^{10}(0.88)^{45-10}$$

Πρόβλημα 4

Ένας αφηρημένος καθηγητής έχει στην τσέπη του n κλειδιά από τα οποία μόνο ένα (δεν θυμάται ποιο..) ταιριάζει στην πόρτα του γραφείου του. Επιλέγει τυχαία ένα κλειδί και το δοκιμάζει στην κλειδαριά. Αν δεν ταιριάζει, επιλέγει ένα άλλο και ξαναπροσπαθεί μέχρις ότου επιλέξει το σωστό κλειδί και ξεκλειδώσει τελικά την πόρτα του. Ένα κλειδί το οποίο δεν ανοίγει την πόρτα, μπαίνει πάλι πίσω στην τσέπη του, έτσι ώστε όταν επιλέγει το επόμενο, καθένα από τα n κλειδιά επιλέγονται ξανά με την ίδια πιθανότητα (δειγματοληψία με επανάθεση). Ορίζουμε την τ.μ. X, ως το πλήθος των κλειδιών που δοκιμάζει (συμπεριλαμβανομένου και του τελευταίου με το οποίο ανοίγει τελικά την πόρτα). Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας.

Λύση:

Όταν ο καθηγητής βάζει πίσω στην τσέπη του το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει με επανάθεση, έχουμε ουσιαστικά μία ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα «επιτυχίας» $p=1/n$ που αντιστοιχεί στο να βρει ο καθηγητής το σωστό κλειδί που ανοίγει την πόρτα του, και την πιθανότητα «αποτυχίας» $1-p=1-(1/n)$ που αντιστοιχεί στο να μην πετύχει ο καθηγητής το σωστό κλειδί.

Η διακριτή τ.μ. X συμβολίζει το πλήθος των διαδοχικών προσπαθειών-δοκιμών (κλειδιών που δοκιμάζει ο καθηγητής) μέχρι την πρώτη επιτυχία (που είναι το σωστό κλειδί που ξεκλειδώνει την πόρτα). Επομένως, η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p=\frac{1}{n}$, δηλαδή $X\sim G\left(\frac{1}{n}\right)$ και έχει συνάρτηση πιθανότητας που περιγράφεται από τη σχέση:

$$P_X(k)=(1-p)^{k-1}p=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n};\quad k=1,2,\ldots$$

Πρόβλημα 5

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας τ.μ. X δίδεται από τη σχέση:

$$P_X(k)=c\frac{\lambda^k}{k!};\quad \lambda>0 \text{ και } k=0,1,2,\ldots$$

Να υπολογιστούν:

(i) η σταθερά c,

(ii) η πιθανότητα $P_X(0)$,

(iii) η πιθανότητα $P(X>2)$.

Hint: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$

Λύση:

(i) Για να βρούμε τη σταθερά θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1$, η οποία ισχύει εφόσον η $P_X(k)$ είναι μία έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.
Έτσι,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} c\frac{\lambda^k}{k!} = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \tag{1}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \tag{2}$$

Από 1 και 2 έχουμε ότι:

$$ce^{\lambda} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^{\lambda}} \Leftrightarrow c = e^{-\lambda}$$

(ii)

$$P_X(0) = P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

(iii)

$$P(X > 2) = 1-P(X \leq 2) = 1-[P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)] = 1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$$

Παρατήρηση: Ο υπολογισμός του $P(X > 2) = \sum_{k=3}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=3}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ είναι φανερά πιο δύσκολος..

Πρόβλημα 6

Η εταιρία Αττικό Μετρό δημιουργεί τους συρμούς του ΗΣΑΠ στη γραμμή Πειραιάς-Κηφισιά με τον εξής αλγόριθμο: Στο μηχανοστάσιο του Πειραιά υπάρχουν συνολικά 6 βαγόνια. Αν ένα βαγόνι λειτουργεί, τότε προστίθεται στο συρμό. Αν δεν λειτουργεί, τότε παραμένει στο μηχανοστάσιο. Ένα τυχαία επιλεγμένο βαγόνι λειτουργεί με πιθανότητα 2/3, ανεξάρτητα από όλα τα υπόλοιπα. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το μήκος του συρμού, δηλαδή το πλήθος των βαγονιών που τον αποτελούν.

(i) Ποια είναι η κατανομή της X; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. X.

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει συρμός στη γραμμή Πειραιάς-Κηφισιά;

Λύση:

(i) Θεωρούμε μία δοκιμή Bernoulli, η οποία περιγράφεται από την πιθανότητα «επιτυχίας» $p = 2/3$ που αντιστοιχεί στο να λειτουργεί το βαγόνι και την πιθανότητα «αποτυχίας» $1 - p = 1/3$ που αντιστοιχεί στο να μη λειτουργεί το βαγόνι.

Η διακριτή τ.μ. X συμβολίζει το πλήθος των βαγονιών που αποτελούν το συρμό. Επειδή τα βαγόνια λειτουργούν ή όχι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $(n, p) = (6, 2\frac{2}{3})$, δηλαδή $X \sim B(6, \frac{2}{3})$ και συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, 6$$

(ii) Έστω το ενδεχόμενο: Α = {δεν υπάρχει συρμός}. Τότε, η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει ως εξής:

$$P(A) = P_X(0) = P(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} = 0.001372$$

Χρήσιμη πληροφορία:

Σε ένα πείραμα με δυο ενδεχόμενα, όπου υπάρχουν οι πιθανότητες p και $1 - p$ (π.χ., ρίψη νομίσματος, μετάδοση ενός bit πληροφορίας σε τηλεπικοινωνιακό δίαυλο), ορίζουμε την τ.μ. Bernoulli X με τιμές $x = 1$ για το ενδεχόμενο με πιθανότητα «επιτυχίας» p και $x = 0$ για το άλλο ενδεχόμενο της «αποτυχίας».

Η διωνυμική (Binomial) τ.μ. Y, περιγράφει το συνολικό αριθμό επιτυχιών σε ένα πείραμα με δυο ενδεχόμενα που επαναλαμβάνεται n φορές. Τα ενδεχόμενα των πειραμάτων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε πείραμα είναι p. Άρα, η διωνυμική τ.μ. Y είναι το άθροισμα n ανεξάρτητων (independent and identically distributed) τ.μ. Bernoulli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ που ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Αντιθέτως, η γεωμετρική (Geometric) τ.μ. Z, περιγράφει τον αριθμό των διαδοχικών δοκιμών μέχρι την πρώτη «επιτυχία» (οπότε και το πείραμα τελειώνει).