
ΗΥ-217: Πιθανότητες 4ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Καράλας Κώστας

27 Οκτωβρίου 2014

Πρόβλημα 1

Το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 «τίμιων» κερμάτων. Συμβολίζουμε με Y τον αριθμό που μας λείει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τ.μ. Y και να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητάς της.

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{έρχεται κορώνα}\}$ και $\Gamma = \{\text{έρχεται γράμματα}\}$.

Τα κέρματα είναι «τίμια», άρα $P(K) = \frac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Η τ.μ. Y λαμβάνει τις τιμές $y = 0, 1, 2, 3$, καθώς μπορεί να εμφανιστεί κορώνα από 0 – 3 φορές συνολικά.

Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $P_Y(0) = P(Y = 0) = P(\{\Gamma, \Gamma, \Gamma\}) = P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- $P_Y(1) = P(Y = 1) = P(\{K, \Gamma, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, K, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, \Gamma, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $P_Y(2) = P(Y = 2) = P(\{K, K, \Gamma\}) + P(\{K, \Gamma, K\}) + P(\{\Gamma, K, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

- $P_Y(3) = P(Y = 3) = P(\{K, K, K\}) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Άρα, η PMF θα είναι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & y = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, & y = 1, 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Παρατήρηση 1: Εύκολα μπορεί να επαληθευτεί ότι $\sum P_Y(y) = 1$, που σημαίνει ότι η $P_Y(y)$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

Παρατήρηση 2: Για τον υπολογισμό των από κοινού πιθανοτήτων, μπορεί να κατασκευαστεί και δενδρικό διάγραμμα, όπου κάθε γεγονός που μας ενδιαφέρει αντιστοιχεί σε ένα φύλλο του δέντρου και η πιθανότητά του είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στα κλαδιά της διαδρομής από τη ρίζα στο φύλλο.

Πρόβλημα 2

Δύο μπάλες επιλέγονται σειριακά και με τυχαίο τρόπο από ένα κουτί που έχει 8 άσπρες, 4 μαύρες και 2 κόκκινες. Έστω ότι κερδίζουμε 2 ευρώ για κάθε μαύρη μπάλα που επιλέγουμε και χάνουμε 1 ευρώ για κάθε άσπρη μπάλα που επιλέγουμε. Περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X που συμβολίζει τα κέρδη μας (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα: $A_i = \{\text{επιλέγεται άσπρη μπάλα την } i\text{-οστή φορά}\}$, $M_i = \{\text{επιλέγεται μαύρη μπάλα την } i\text{-οστή φορά}\}$ και $K_i = \{\text{επιλέγεται κόκκινη μπάλα την } i\text{-οστή φορά}\}$.

Επειδή επιλέγουμε συνολικά 2 μπάλες, μπορούμε να κερδίσουμε μέχρι 4 ευρώ στην καλύτερη περίπτωση και να χάσουμε μέχρι 2 ευρώ στη χειρότερη. Αυτό σημαίνει ότι η τ.μ. X , παίρνει τιμές $-2, -1, 0, 1, 2, 4$ (δεν μπορεί να πάρει την τιμή 3, καθώς από τα δεδομένα του προβλήματος είναι αδύνατο να κερδίσουμε 3 ευρώ).

Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $P(X = -2) = P(A_0) \cdot P(A_1 \setminus A_0) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13}$

- $P(X = -1) = P(A_0) \cdot P(K_1 \setminus A_0) + P(K_0) \cdot P(A_1 \setminus K_0) = \frac{8}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \cdot \frac{8}{13}$

- $P(X = 0) = P(K_0) \cdot P(K_1 \setminus K_0) = \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13}$

- $P(X = 1) = P(A_0) \cdot P(M_1 \setminus A_0) + P(M_0) \cdot P(A_1 \setminus M_0) = \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{14} \cdot \frac{8}{13}$

- $P(X = 2) = P(M_0) \cdot P(K_1 \setminus M_0) + P(K_0) \cdot P(M_1 \setminus K_0) = \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13}$

- $P(X = 4) = P(M_0) \cdot P(M_1 \setminus M_0) = \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιούμε δεσμευμένες πιθανότητες γιατί έχουμε ένα πείραμα «σειριακής φύσης».

Πρόβλημα 3

Η πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος από ένα εργοστάσιο είναι ίση με 0.1. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μικρό δείγμα 5 προϊόντων από το εργοστάσιο, να βρεθούν:

- (i) η πιθανότητα να προκύψουν 2 ελαττωματικά προϊόντα,
- (ii) η πιθανότητα να προκύψουν παραπάνω από 2 ελαττωματικά προϊόντα.

Λύση:

Θεωρούμε το πείραμα τύχης στο οποίο εκτελούμε 5 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, όπου η πιθανότητα «επιτυχίας» αντιστοιχεί στο να παραχθεί ελαττωματικό προϊόν και είναι ίση με $p = 0.1$, ενώ η πιθανότητα «αποτυχίας» αντιστοιχεί στο να παραχθεί άρτιο προϊόν και είναι ίση με $1 - p = 0.9$.

Ορίζουμε τώρα τη διακριτή τ.μ. X , η οποία μετρά το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων. Τότε, επειδή επιλέγουμε ανεξάρτητα 5 προϊόντα (ακολουθία πειραμάτων), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $(n, p) = (5, 0.1)$, δηλαδή $X \sim B(5, 0.1)$.

(i)

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^3 = \dots = 0.0729$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\binom{5}{0} (0.1)^0 (0.9)^5 + \binom{5}{1} (0.1)^1 (0.9)^4 + \binom{5}{2} (0.1)^2 (0.9)^3 \right] \\ &= \dots = 0.0171 \end{aligned}$$

Υπενθύμιση: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Πρόβλημα 4

Τα bits πληροφορίας 0 και 1 μεταδίδονται μέσω μη ιδανικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού. Εξαιτίας του θορύβου, το bit λαμβάνεται λάθος με πιθανότητα 0.2. Για να βελτιώσουμε την αξιοπιστία του συστήματος, ο πομπός στέλνει την ακολουθία 00000 όταν θέλουμε να μεταδώσουμε το 0 και την ακολουθία 11111 όταν θέλουμε να μεταδώσουμε το 1. Αν ο

δέκτης χρησιμοποιεί “majority decoding” για να αποφασίσει ως προς το bit πληροφορίας που μεταδόθηκε, ποια η πιθανότητα λάθος απόφασης;

Κατά το “majority decoding” ο δέκτης αποφασίζει κατά πλειοψηφία, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση αποφασίζει 0 ή 1 αν τουλάχιστον 3 από τα 5 ψηφία της ληφθείσας ακολουθίας είναι 0 ή 1 αντιστοίχως.

Λύση:

Θεωρούμε το πείραμα τύχης στο οποίο εκτελούμε 5 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, όπου η πιθανότητα «επιτυχίας» αντιστοιχεί στη σωστή μετάδοση του bit και είναι ίση με $p = 0.8$, ενώ η πιθανότητα «αποτυχίας» αντιστοιχεί στη λανθασμένη μετάδοση του bit και είναι ίση με $1 - p = 0.2$.

Ορίζουμε τώρα τη διακριτή τ.μ. X , η οποία μετρά το πλήθος των επιτυχιών στα 5 bits. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $(n, p) = (5, 0.8)$, δηλαδή $X \sim B(5, 0.8)$.

Συνεπώς, η X θα έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$P(X = x) = \binom{5}{x} (0.8)^x (0.2)^{5-x}$$

Έστω τα ενδεχόμενα: $A_i = \{i \text{ από τα 5 bits μεταδίδονται σωστά}\}$, όπου $i \in [0, 5]$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η τ.μ. X μετρά το πλήθος των σωστών μεταδόσεων, καθώς και το γεγονός ότι ο δέκτης χρησιμοποιεί “majority decoding” για να αποφασίσει ως προς το bit πληροφορίας που μεταδόθηκε, καταλαβαίνουμε ότι η πιθανότητα λάθος απόφασης είναι ίση με $P(A_2) + P(A_1) + P(A_0)$. Με αντικατάσταση στην PMF της X , βρίσκουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(\{\text{λανθασμένη απόφαση δέκτη}\}) = \binom{5}{2} (0.8)^2 (0.2)^3 + \binom{5}{1} (0.8)^1 (0.2)^4 + (0.2)^5 = \dots$$

Πρόβλημα 5

Ένα δοχείο περιέχει αρχικά μία κόκκινη και μία μπλε μπάλα. Σε κάθε στάδιο του πειράματος, επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα και την επανατοποθετούμε μέσα στο δοχείο μαζί με ακόμη μία μπάλα του ίδιου χρώματος. Δηλαδή, αν την πρώτη φορά επιλέξουμε την κόκκινη μπάλα, τότε αυτή τοποθετείται πάλι στο δοχείο μαζί με μία ακόμη κόκκινη μπάλα, οπότε το δοχείο περιέχει συνολικά 2 κόκκινες και μία μπλε. Έστω X το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας.

- (i) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X .
- (ii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > n)$, όπου n φυσικός αριθμός και δείξτε ότι η πιθανότητα του γεγονότος να επιλεγεί τελικά η μπλε μπάλα είναι 1.

Λύση:

Με λίγη λογική, καταλαβαίνουμε ότι αν για πρώτη φορά επιλέξουμε μπλε μπάλα στο i -οστό στάδιο, τότε στα προηγούμενα $(i-1)$ στάδια είχαμε επιλέξει αναγκαστικά κόκκινη μπάλα.

(i) Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $P(X=1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1(1+1)}$
- $P(X=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2(2+1)}$
- $P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3(3+1)}$
- $P(X=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4(4+5)}$
- ...

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας ακολουθεί ένα συγκεκριμένο μοτίβο (pattern) που μπορεί να μας δώσει ένα γενικό τύπο που έχει ως εξής:

$$P(X=i) = \frac{1}{i(i+1)}, \quad i \geq 1$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > n) &= 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \\ &= 1 - \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right] \\ &= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) \right] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Θα βρούμε την πιθανότητα όταν $n \rightarrow \infty$. Τότε έχω:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Συνεπώς, αφού η τ.μ. X αντιπροσωπεύει το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας, καταλαβαίνουμε ότι η μπλε μπάλα θα επιλεγεί κάποια στιγμή στο μέλλον με πιθανότητα 1!

Πρόβλημα 6

Θεωρήστε το λεγόμενο συμμετρικό δυαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι που περιγράφεται από τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{00} = p_{11} = 1 - p = 0.8 \text{ και } p_{01} = p_{10} = p = 0.2,$$

όπου $p_{ij}(i, j = 1, 2)$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα λήψης του συμβόλου i , δεδομένου ότι έχει σταλεί το σύμβολο j . Η είσοδος στο κανάλι αποτελείται από μία ακολουθία συμβόλων 0 και 1, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Έστω E η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των σφαλμάτων κατά τη μετάδοση 5 λέξεων που αποτελούνται από 8 σύμβολα η κάθε μία.

- (i) Ποια η συνάρτηση πιθανότητας της E ;
- (ii) Ποια η πιθανότητα σωστής μετάδοσης τουλάχιστον 38 συμβόλων;
- (iii) Υποθέστε ότι μεταδίδονται 10^6 σύμβολα το δευτερόλεπτο. Αν $p = 5 \times 10^{-8}$, ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ενός σφάλματος μετάδοσης το λεπτό;

Λύση:

(i) Λαμβάνοντας υπόψιν το σύστημα μετάδοσης, θεωρούμε μία δοκιμή Bernoulli, η οποία περιγράφεται από την πιθανότητα «επιτυχίας» $p = 0.2$, που αντιστοιχεί στο να γίνει κάποιο λάθος κατά τη μετάδοση ενός bit (ανεξάρτητα αν αυτό το bit είναι 0 ή 1), και την πιθανότητα «αποτυχίας» $1 - p = 0.8$, που αντιστοιχεί στο να μη γίνει κάποιο λάθος κατά τη μετάδοση ενός bit.

Συνεπώς, η τ.μ. E , η οποία περιγράφει το συνολικό πλήθος των σφαλμάτων κατά τη μετάδοση 5 λέξεων που αποτελούνται από 8 σύμβολα η κάθε μία, είναι διωνυμική, με παραμέτρους $(n, p) = (5 \cdot 8, 0.2) = (40, 0.2)$, δηλαδή $E \sim B(40, 0.2)$.

Έτσι, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. E προκύπτει ως:

$$P_E(e) = \binom{40}{e} (0.2)^e (0.8)^{40-e}$$

(ii) Για να μεταδοθούν τουλάχιστον 38 bits σωστά, σημαίνει πως έγιναν είτε 0, είτε 1, είτε 2 λάθη σε bits (από τα 40 συνολικά). Αυτό μεταφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(\text{τουλ. 38 bits μεταδόθηκαν σωστά}) &= P(E < 3) \\ &= P(E = 0) + P(E = 1) + P(E = 2) \\ &= (0.8)^{40} + \binom{40}{1} (0.2)^1 (0.8)^{39} + \binom{40}{2} (0.2)^2 (0.8)^{38} \\ &= \dots = 0.00794 \end{aligned}$$

(iii) Εύκολα συμπεραίνουμε ότι σε ένα λεπτό μεταδίδονται $60 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^7$ bits. Έτσι, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(\text{τουλ. 1 bit μεταδίδεται λάθος}) &= P(E > 0) = 1 - P(E = 0) \\ &= 1 - (1 - p)^n \\ &= 1 - (1 - 5 \cdot 10^{-8})^{6 \cdot 10^7} \\ &= \dots = 0.95022 \end{aligned}$$