ΗΥ217 - Φροντιστήριο 3 - Συνδιαστική Ανάλυση

HW2 - 2006 - Ασκ 1

Το θησαυροφυλάκιο μιας τράπεζας έχει κλειδαριά με συνδυασμό που απαιτεί για να ανοίξει την εισαγωγή σε οποιαδήποτε σειρά 8 διαφορετικών ακεραίων αριθμών από το 1 μέχρι και το 90. Ειδικά η κλειδαριά αυτή επιτρέπει τη χρήση 10 διαφορετικών ακεραίων αριθμών, δηλαδή η κλειδαριά ανοίγει όταν εισάγονται οποιοιδήποτε 8 από τους 10 αριθμούς. Υπολογίσετε την πιθανότητα ότι ένας διαρρήκτης θα μπει στο θησαυροφυλάκιο με την πρώτη προσπάθεια.

Λύση

Για να βρούμε την πιθανότητα ότι ένας διαρρήκτης θα μπει στο θησαυροφυλάκιο με την πρώτη προσπάθεια, θα πρέπει να διαιρέσουμε τον αριθμό των ευνοϊκών ενδεχομένων με το συνολικό αριθμό ενδεχομένων.

Συγκεκριμένα,

→ αριθμός ευνοϊκών ενδεχομένων $= \binom{10}{8}$

επιλέγουμε 8 από τους 10 διαφορετικούς ακεραίους

→ συνολικός αριθμός ενδεχομένων $= \binom{90}{8}$

τρόποι για να επιλέξουμε 8 από τους 90 αριθμούς

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{10}{8}}{\binom{90}{8}} \simeq 5.8053 \cdot 10^{-10}$$

HW3 - 2007 - Ασκ 3

Πόσους αναγραμματισμούς μπορούμε να κάνουμε στις παρακάτω λέξεις;

α) children

β) bookkeeper

Λύση

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ..., k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο έχουμε

α) children : μπορούμε να κάνουμε 8! αναγραμματισμούς (παρατηρούμε ότι κάθε γράμμα εμφανίζεται μία φορά $\frac{8!}{1!1!1!1!1!1!1!1!} = 8!$)

β) bookkeeper : μπορούμε να κάνουμε $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ αναγραμματισμούς

η λέξη έχει 10 γράμματα συνολικά:

1 b

2 o

2 k

3 e

1 p

1 r

άρα $\frac{10!}{1!\,2!\,2!\,3!\,1!\,1!} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!}$

HW2 - 2008 - Ασκ 5

Το δελτίο καιρού για μια τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει "ήλιος", "συννεφιά", "βροχή", ή "χιόνι". Υποθέτουμε 4 εποχές (φθινόπωρο, χειμώνας, άνοιξη, καλοκαίρι) με 90 ημέρες στην κάθε εποχή, ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα και ότι δε βρέχει το καλοκαίρι.
Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά (δηλαδή ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού 360 - μερών)

Λύση

Την άνοιξη και το φθινόπωρο κάθε μέρα έχει 3 πιθανές καταστάσεις για τον καιρό (ήλιος, συννεφιά, βροχή) συνεπώς για καθεμιά από αυτές τις εποχές το συνολικό πλήθος καταστάσεων είναι 3^{90}.

Ομοίως για τον χειμώνα υπάρχουν 4 πιθανές καταστάσεις για κάθε μέρα (ήλιος, συννεφιά, βροχή, χιόνι) επομένως το συνολικό πλήθος καταστάσεων για τον χειμώνα είναι 4^{90}.

Τέλος, για το καλοκαίρι έχουμε 2 πιθανές καταστάσεις για κάθε μέρα (ήλιος, συννεφιά), επομένως 2^{90} συνολικό πλήθος καταστάσεων.

Άρα το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού για 360 ημέρες είναι:

$3^{90} \times 3^{90} \times 4^{90} \times 2^{90} = 10^{157}$ ακολουθίες

HW3 - 2009 - Ασκ. 5

Μόλις έχουμε ολοκληρώσει n ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος το οποίο φέρνει κεφαλή ~~..~~ με πιθανότητα p.

α) Δεδομένου ότι έχει έρθει κεφαλή ακριβώς μια φορά (στις n ρίψεις) ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη ρίψη να έχει φέρει κεφαλή;

β) Δεδομένου ότι έχει έρθει κεφαλή ακριβώς 2 φορές, ποιά η πιθανότητα η πρώτη ρίψη να έχει φέρει κεφαλή;

γ) Δεδομένου ότι έχει έρθει κεφαλή ακριβώς 7 φορές, ποια η πιθανότητα 3 από τις 4 πρώτες ρίψεις να έχουν φέρει κεφαλή;

Λύση

α) Δεδομένου ότι έχει έρθει κεφαλή ακριβώς μια φορά, υποθέτουμε ότι μπορεί να ήρθε σε οποιαδήποτε ρίψη. Επομένως, η πιθανότητα η πρώτη ρίψη να έφερε κεφαλή είναι $\frac{1}{n}$.

β) Δεδομένου ότι έχει έρθει κεφαλή ακριβώς 2 φορές, εάν η πρώτη ρίψη είχε φέρει κεφαλή, υπάρχουν $n-1$ ρίψεις όπου μπορεί να έρθει κεφαλή. Ο συνολικός αριθμός φορών ώστε να έχουμε 2 κεφαλές είναι $\binom{n}{2}$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$.

γ) Δεδομένου ότι έχει έρθει κεφαλή ακριβώς 7 φορές, η πιθανότητα 3 από τις 4 πρώτες ρίψεις να έχουν φέρει κεφαλή, διαχωρίζεται σε 3 μέρη:

i) ο αριθμός των φορών που μπορεί να έχουμε 3 κεφαλές στις 4 πρώτες ρίψεις είναι $\binom{4}{3}$.

ii) ο αριθμός των φορών ώστε να έχουμε 4 κεφαλές στις n-4 ρίψεις που απέμειναν είναι $\binom{n-4}{4}$

iii) ο αριθμός των φορών ώστε να έχουμε 7 κεφαλές σε n ρίψεις είναι $\binom{n}{7}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{n-4}{4}}{\binom{n}{7}}$$

HW2-2011-Ασκ 3

Σε ένα παιχνίδι μπριτζ όλα τα φύλλα από μια τράπουλα με 52 χαρτιά μοιράζονται σε 4 παίκτες. Ποιά είναι η πιθανότητα:

α) Ένας παίκτης να πάρει όλα (και τα 13) μπαστούνια;

β) Κάθε παίκτης να πάρει έναν άσσο;

Λύση

α) Υπάρχουν ~~δυνατοί τρόποι~~ $\binom{52}{13,13,13,13}$ δυνατοί τρόποι να μοιράσουμε τα φύλλα σε τέσσερις διαφορετικούς παίκτες.

Υπάρχουν $\binom{39}{13,13,13}$ δυνατοί τρόποι να μοιράσουμε τα φύλλα έτσι ώστε ένας συγκεκριμένος παίκτης να πάρει και τα 13 μπαστούνια.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$4\,\frac{\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 6{,}3\cdot 10^{-12}$$

β) Για να καθορίσουμε τον αριθμό των αποτελεσμάτων όπου ο κάθε παίκτης θα λάβει και έναν άσσο, ξεχωρίζουμε από την τράπουλα τους 4 άσσους και παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\binom{48}{12,12,12,12}$ πιθανοί τρόποι μοιράσματος των υπόλοιπων 48 καρτών όπου ο κάθε παίκτης θα λάβει από 12 κάρτες.

Αφού υπάρχουν 4! τρόποι να μοιράσουμε τους 4 άσσους ώστε ο κάθε παίκτης να λάβει από έναν, παίρνουμε ότι ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων όπου ο κάθε παίκτης θα λάβει ακριβώς έναν άσσο είναι $4!\binom{48}{12, 12, 12, 12}$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{4!\binom{48}{12,12,12,12}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 0,105$$

HW2 - 2011 - Ασκ 4

Ανακατεύουμε μια τράπουλα με 52 χαρτιά και την τοποθετούμε στο τραπέζι.

α) Ποιά η πιθανότητα ότι το χαρτί στην κορυφή είναι άσσος;

β) Κάνετε το εξής: Επιλέγετε ένα χαρτί, το βάζετε στην άκρη και επιλέγετε ένα δεύτερο χαρτί.

- Πριν δείτε τι είναι το πρώτο χαρτί, ποιά η πιθανότητα ότι το δεύτερο χαρτί είναι άσσος;
- Έστω ότι το πρώτο χαρτί είναι άσσος. Ποιά η πιθανότητα ότι το δεύτερο χαρτί είναι ρήγας;

γ) Επιλέγετε 7 χαρτιά από την τράπουλα.

- Ποιά η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 3 άσσους;
- Ποιά η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 2 ρηγάδες;
- Ποιά η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 3 άσσους ή ακριβώς 2 ρηγάδες ή ακριβώς 3 άσσους και 2 ρηγάδες;

Λύση

α) Η τράπουλα έχει συνολικά 4 άσσους. Άρα η πιθανότητα το χαρτί στην κορυφή να είναι άσσος ισούται με $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

β) • Κάθε χαρτί έχει ίδια πιθανότητα να είναι δεύτερο στην τράπουλα, και υπάρχουν 4 άσσοι στην τράπουλα, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι πάλι $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

• Υποθέτουμε ότι το πρώτο χαρτί είναι άσσος. Άρα απομένουν 51 χαρτιά στην τράπουλα, 4 από τα οποία είναι ρηγάδες, οπότε η πιθανότητα το δεύτερο χαρτί να είναι ρήγας είναι $\frac{4}{51}$. Άρα, εφόσον κάθε χαρτί έχει την ίδια πιθανότητα να είναι οποιδήποτε στην τράπουλα, έχουμε ότι η πιθανότητα το δεύτερο χαρτί να είναι ρήγας ισούται με $\frac{4}{51}$.

γ) Υπάρχουν $\binom{52}{7}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά από την τράπουλα.

• Ορίζουμε το γεγονός $A = \{$στα 7 χαρτιά υπάρχουν ακριβώς 3 άσσοι$\}$. Μπορούμε να διαλέξουμε 3 από τους 4 άσσους της τράπουλας με $\binom{4}{3}$ τρόπους. Από τα 48 χαρτιά που απομένουν (τα οποία δεν περιέχουν άσσους) υπάρχουν $\binom{48}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε τα υπόλοιπα 4 χαρτιά από την τράπουλα. Άρα, υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{48}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά με ακριβώς 3 άσσους. Επομένως διαιρώντας με τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε 7 χαρτιά από την τράπουλα έχουμε τη ζητούμενη πιθανότητα:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4}}{\binom{52}{7}}$$

• Έστω το γεγονός $B = \{$στα 7 χαρτιά υπάρχουν ακριβώς 2 ρηγάδες$\}$. Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{5}}{\binom{52}{7}}$$

• Αυτή τη φορά ψάχνουμε την εξής πιθανότητα:

$P(A \cup B)$, όπου $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Γνωρίζουμε τις $P(A)$, $P(B)$ από τα προηγούμενα ερωτήματα.

Αρκεί να βρούμε την $P(A \cap B)$.

→ Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ τρόποι να διαλέξουμε 3 από τους 4 άσσους της τράπουλας.

→ Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε 2 από τους 4 ρηγάδες της τράπουλας.

→ Υπάρχουν $\binom{44}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε τα άλλα 2 χαρτιά

Επομένως υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά με 3 άσσους και 2 ρηγάδες ακριβώς.

Άρα έχουμε:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$

Οπότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{5} - \binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$

HW2 - 2011 - Ασκ. 5

Αν επιλέξουμε τυχαία 3 μπάλες από ένα κουτί που περιέχει 6 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες, ποιά η πιθανότητα μια από τις μπάλες της επιλογής μας να είναι άσπρη και οι δύο άλλες μαύρες;

Λύση

Α' τρόπος

Αν [redacted] μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγουμε τις μπάλες, τότε ο δειγματοχώρος αποτελείται από $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ δυνατά αποτελέσματα. Επίσης έχουμε

- πρώτη μπάλα λευκή και οι δύο άλλες μαύρες: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ αποτελέσματα (Λ, Μ, Μ)
- πρώτη μπάλα μαύρη, δεύτερη λευκή, τρίτη μαύρη: $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ αποτελέσματα. (Μ, Λ, Μ)
- δύο πρώτες μαύρες, τρίτη λευκή: $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ αποτελέσματα (Μ, Μ, Λ)

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\dfrac{120+120+120}{990} = \dfrac{4}{11}$

Β' τρόπος

Υπάρχουν $\binom{11}{3} = 165$ δυνατά αποτελέσματα στον δειγματοχώρο. Καθένα σύνολο από 3 μπάλες αντιστοιχεί σε 3! αποτελέσματα όταν λαμβάνεται υπόψιν η διάταξη. Αν όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα όταν μας ενδιαφέρει η σειρά, παραμένουν εξίσου ισοπίθανα και όταν δε μας ενδιαφέρει.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \dfrac{4}{11}$