2ο φροντιστήριο ΗΥ217
Επιμέλεια: Σ. Σαββάκη
10 Οκτωβρίου 2014

Άσκηση 1

Η Μαρία θέλει να φάει ένα μπισκότο, αλλά κάνει δίαιτα. Αποφασίζει να ρίξει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Θα φάει το μπισκότο, αν η ρίψη του κέρματος φέρει κεφαλή. Αν έρθουν γράμματα δεν αφήνει το μπισκότο αμέσως, αλλά ρίχνει το κέρμα άλλες 2 φορές για να αποφασίσει. Αν και οι 2 επόμενες ρίψεις φέρουν κεφαλή, τότε τρώει το μπισκότο. Διαφορετικά, το φυλάει για την επόμενη φορά που θα το πεθυμήσει...

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία η Μαρία τρώει το μπισκότο.

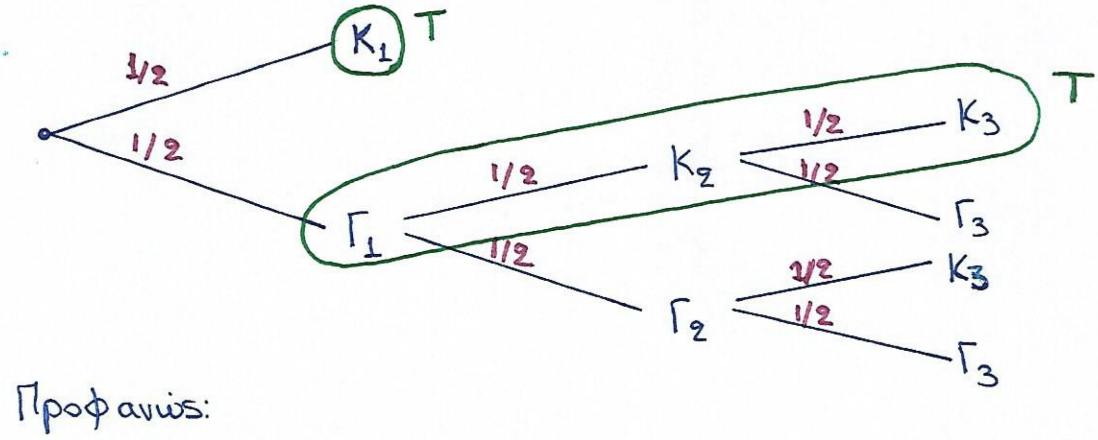
Ορίζουμε τα γεγονότα:

$K_i = \{$ Η i-στή ρίψη φέρνει κεφαλή $\}$

$\Gamma_i = \{$ Η i-στή ρίψη φέρνει γράμματα $\}$ $\quad i = 1, 2, 3$

$T = \{$ Η Μαρία τρώει το μπισκότο $\}$

Το δενδρικό διάγραμμα του πειράματος:



Προφανώς:

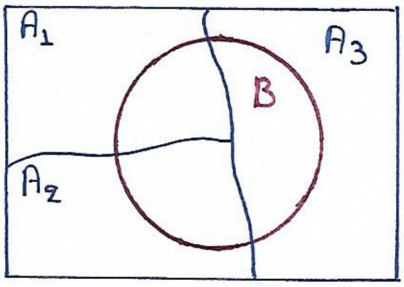
$T = K_1 \cup (\Gamma_1 \cap K_2 \cap K_3)$ → από το διάγραμμα ξένα/ασυμβίβαστα

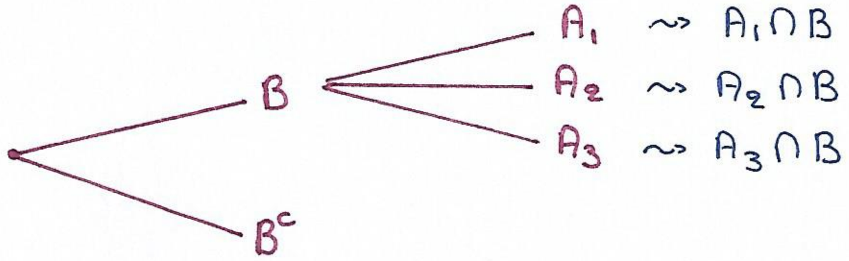
$$\Rightarrow P(T) = P(K_1) + P(\Gamma_1 \cap K_2 \cap K_3)$$
$$= P(K_1) + P(\Gamma_1) \cdot P(K_2) \cdot P(K_3)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{5}{8}$$

(β) Δεδομένου ότι η Μαρία έφαγε το μπισκότο, ποια η πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε κεφαλή;

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(K_1 / T) = \dfrac{P(K_1 \cap T)}{P(T)} = \dfrac{1/2}{5/8} = \dfrac{4}{5}$

Θεωρία: Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας





$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

(Αυτά είναι ξένα μεταξύ τους γεγονότα, γιατί ο Ω έχει διαμεριστεί κατάλληλα)

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Άσκηση 2

Μας δίδονται 2 πειραγμένα νομίσματα, εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/3$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $2/3$. Τα 2 νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δε μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα 2 νομίσματα από μία φορά το καθένα, διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$K_i = \{$Η i-στή ρίψη φέρνει κεφαλή$\}$

(a) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(K_1)$ και $P(K_2)$

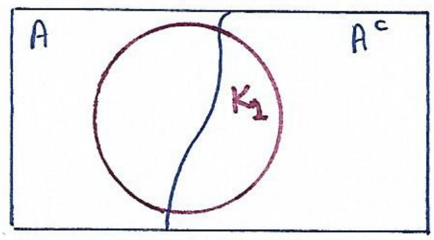
Ορίζουμε το γεγονός:

$A = \{$Το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $2/3$ ρίχνεται πρώτο$\}$

Προφανώς:

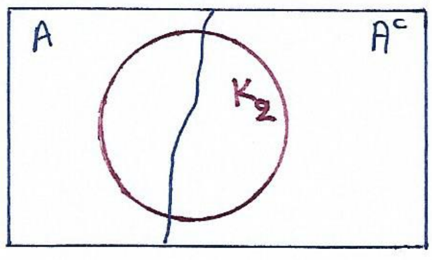
$A^c = \{$Το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $1/3$ ρίχνεται πρώτο$\}$

Διαμερίζουμε, λοιπόν το δειγματοχώρο μας στα γεγονότα A και A^c (αφού ξέρουμε ότι θα συμβεί είτε το ένα είτε το άλλο γεγονός) και χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:



$$P(K_1) = P(A \cap K_1) + P(A^c \cap K_1) = P(A) \cdot P(K_1 \mid A) + P(A^c) \cdot P(K_1 \mid A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Αντίστοιχα:



$$P(K_2) = P(A \cap K_2) + P(A^c \cap K_2) = P(A) \cdot P(K_2 \mid A) + P(A^c) \cdot P(K_2 \mid A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

Αναλυτικά:

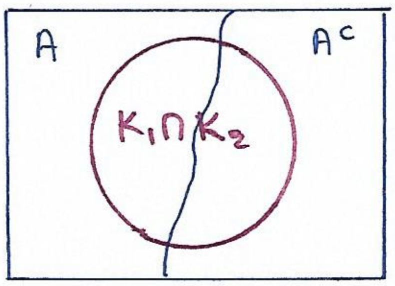
$P(K_1|A)$ = Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή στην 1η ρίψη, δεδομένου ότι το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής 2/3, ρίχνεται πρώτο.

$P(K_1|A^c)$ = Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή στην 1η ρίψη, δεδομένου ότι το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής 1/3, ρίχνεται πρώτο.

$P(K_2|A)$ = Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή στη 2η ρίψη, δεδομένου ότι το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής 2/3, ρίχνεται πρώτο.

$P(K_2|A^c)$ = Η πιθανότητα να έρθει κεφαλή στη 2η ρίψη, δεδομένου ότι το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής 1/3 ρίχνεται πρώτο.

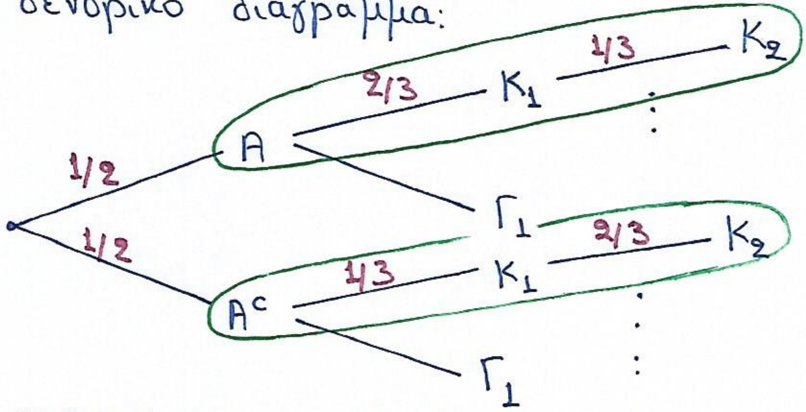
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι 2 ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή $P(K_1 \cap K_2)$



Ομοίως, και πάλι από το θεώρημα ολικής πιθανότητας ισχύει ότι:

$P(K_1 \cap K_2) = P(A \cap K_1 \cap K_2) + P(A^c \cap K_1 \cap K_2)$ ①

Για να το δείξουμε καλύτερα θα κάνουμε δενδρικό διάγραμμα:



→ Γεγονός $A \cap K_1 \cap K_2$

→ Γεγονός $A^c \cap K_1 \cap K_2$

$$P(A \cap K_1 \cap K_2) = P(A) \cdot P(K_2|A) \cdot P(K_2|K_1 \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(A^c \cap K_1 \cap K_2) = P(A^c) \cdot P(K_1|A^c) \cdot P(K_2|K_1 \cap A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Άρα ① $\Leftrightarrow$ $P(K_1 \cap K_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

(γ) Είναι τα γεγονότα K_1 και K_2 ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Για να είναι τα γεγονότα K_1 και K_2 ανεξάρτητα θα έπρεπε να ισχύει: $P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2)$. Όμως εδώ έχουμε από (β) ότι $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$ και από (α) ότι $P(K_1) \cdot P(K_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Άρα τα K_1 και K_2 <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητα.

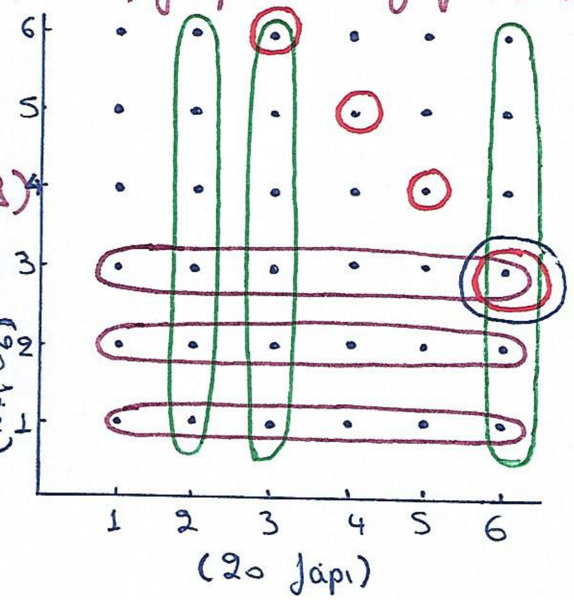
Άσκηση 3

Ρίχνουμε ανεξάρτητα δύο δίκαια εξάεδρα ζάρια. Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{$ Το πρώτο ζάρι φέρνει 1, 2 ή 3 $\}$

$B = \{$ Το πρώτο ζάρι φέρνει 2, 3 ή 6 $\}$

$C = \{$ Το άθροισμα των 2 ζαριών είναι 9 $\}$



(α) Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Επειδή τα ζάρια είναι δίκαια και τα πειράματα ανεξάρτητα, η πιθανότητα να προκύψει οποιοδήποτε ζευγάρι είναι 1/36 και:

- $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = P\{(5,4),(4,5),(3,6),(6,3)\}$
- $P(A \cap B \cap C) = P\{(3,6)\} = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}$

(β) Είναι τα A, B και C ανεξάρτητα;

__Θεωρία__: Για να είναι τα A, B και C ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύουν:

(1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(2) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

(3) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

(4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Εδώ έχουμε:

(1) $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ✓

(2) $P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ ✗

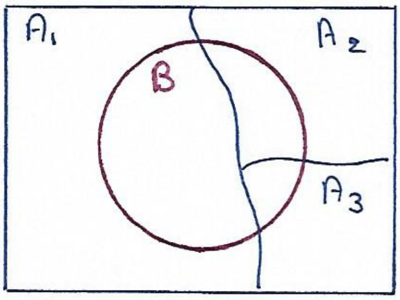
(3) $P(B \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}$ ✓

(4) Ισχύει από (α) ✓

Έστω και μία συνθήκη δεν ισχύει, άρα τα A, B και C __δεν__ είναι ανεξάρτητα.

Θεωρία: Κανόνας του Bayes

• Παρατηρούμε το αποτέλεσμα / δεδομένο και θέλουμε να βρούμε το αίτιο που το προκάλεσε ή αλλιώς εξάγουμε συμπεράσματα από παρατηρήσεις.



$$P(\underset{\text{αίτιο}}{A_i} \mid \overset{\text{παρατήρηση}}{B}) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_k \cap B)}$$

$$= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B|A_k)}_{\text{Θεώρημα ολικής πιθανότητας.}}}$$

Άσκηση 4

Μια εξωμήτρια κύηση έχει διπλάσια πιθανότητα να συμβεί αν η έγγυος είναι καπνίστρια, απ' ότι αν δεν είναι. Αν το 32% των γυναικών σε ηλικία αναπαραγωγής είναι καπνίστριες, ποιο ποσοστό των γυναικών που παρουσιάζουν εξωμήτρια κύηση είναι καπνίστριες;

Έστω τα εξής γεγονότα:

E = { Μια τυχαία επιλεγμένη έγγυος γυναίκα έχει εξωμήτρια κύηση }
K = { » » » » είναι καπνίστρια }

Τότε από τα δεδομένα έχουμε ότι:

$P(E|K) = 2P(E/K^c)$ και $P(K) = 0{,}32$

Εδώ παρατήρηση: εξωμήτρια κύηση
πιθανό αίτιο: κάπνισμα } Bayes

$$P(K/E) = \frac{P(K \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(K) \cdot P(E|K)}{P(K) \cdot P(E|K) + P(K^c) \cdot P(E|K^c)}$$

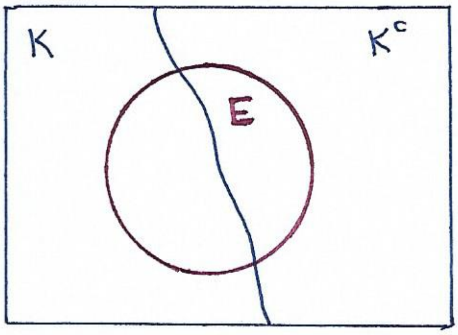
$$= \frac{P(K) \cdot 2P(E|K^c)}{P(K) \cdot 2P(E/K^c) + P(K^c) \cdot P(E/K^c)}$$

$$= \frac{P(K) \cdot 2\cancel{P(E/K^c)}}{\cancel{P(E/K^c)}(2P(K) + P(K^c))}$$

$$= \frac{2P(K)}{2P(K) + P(K^c)}$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}32}{2 \cdot 0{,}32 + 0{,}68}$$

$$= 0{,}4848$$



Άσκηση 5

Το 46% των ψηφοφόρων δηλώνουν Ανεξάρτητοι. Το 30% δηλώνουν Φιλελεύθεροι και το 24% δηλώνουν Συντηρητικοί. Σε μια πρόσφατη εκλογή, ψήφισε το 35% των Ανεξάρτητων, το 62% των Φιλελεύθερων και το 58% των Συντηρητικών. Επιλέγουμε τυχαία έναν ψηφοφόρο. Δεδομένου ότι αυτός ψήφισε στην πρόσφατη εκλογή, ποια η πιθανότητα να είναι:

(α) Ανεξάρτητος;

Έστω τα εξής γεγονότα:

$A = \{$ Ένας τυχαία επιλεγμένος ψηφοφόρος είναι Ανεξάρτητος $\}$

$\Phi = \{$ Ένας τυχαία επιλεγμένος ψηφοφόρος είναι Φιλελεύθερος $\}$

$\Sigma = \{$ Ένας τυχαία επιλεγμένος ψηφοφόρος είναι Συντηρητικός $\}$

$\Psi = \{$ Ένας τυχαία επιλεγμένος πολίτης ψήφισε $\}$

Παρατήρηση: Ψήφισε ⇝ Πόσο πιθανό είναι να είναι Ανεξάρτητος; → Bayes

$$P(A|\Psi) = \frac{P(A)\cdot P(\Psi/A)}{P(A)\cdot P(\Psi/A) + P(\Phi)\cdot P(\Psi/\Phi) + P(\Sigma)\cdot P(\Psi/\Sigma)} \quad (1)$$

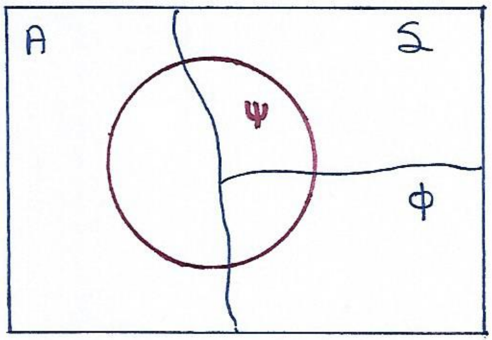
Από δεδομένα έχουμε:

$P(A) = 0{,}46$, $P(\Psi/A) = 0{,}35$

$P(\Phi) = 0{,}3$, $P(\Psi/\Phi) = 0{,}62$

$P(\Sigma) = 0{,}24$, $P(\Psi/\Sigma) = 0{,}58$

Τα γεγονότα A, Φ και Σ αποτελούν μια διαμέριση του δειγματοχώρου αφού $P(A) + P(\Phi) + P(\Sigma) = 1$ (όλος ο πληθυσμός)



$$(1) = \frac{0{,}46\cdot 0{,}35}{0{,}46\cdot 0{,}35 + 0{,}3\cdot 0{,}62 + 0{,}24\cdot 0{,}58}$$

$$= 0{,}331$$

(β) Φιλελεύθερος;

$$P(\Phi/\Psi) = \frac{P(\Phi)\cdot P(\Psi/\Phi)}{P(A)\cdot P(\Psi/A) + P(\Phi)\cdot P(\Psi/\Phi) + P(\Sigma)\cdot P(\Psi/\Sigma)}$$

$$= \frac{0{,}3\cdot 0{,}62}{0{,}46\cdot 0{,}35 + 0{,}3\cdot 0{,}62 + 0{,}24\cdot 0{,}58}$$

$$= 0{,}383$$

(γ) Συντηρητικός;

$$P(\Sigma|\Psi) = \frac{P(\Sigma)\cdot P(\Psi/\Sigma)}{P(A)\cdot P(\Psi/A) + P(\Phi)\cdot P(\Psi/\Phi) + P(\Sigma)\cdot P(\Psi|\Sigma)}$$

$$= \frac{0{,}24\cdot 0{,}58}{0{,}46\cdot 0{,}35 + 0{,}3\cdot 0{,}62 + 0{,}24\cdot 0{,}58}$$

$$= 0{,}286$$

(δ) Τι ποσοστό των ψηφοφόρων έλαβε μέρος στην εκλογή;

Απο θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(\Psi) = P(\Psi\cap A) + P(\Psi\cap\Sigma) + P(\Psi\cap\Phi)$$

$$= P(A)\cdot P(\Psi/A) + P(\Sigma)\cdot P(\Psi/\Sigma) + P(\Phi)\cdot P(\Psi/\Phi)$$

$$= 0{,}46\cdot 0{,}35 + 0{,}24\cdot 0{,}58 + 0{,}3\cdot 0{,}62$$

$$= 0{,}4862$$