1ο Φροντιστήριο ΗΥ217

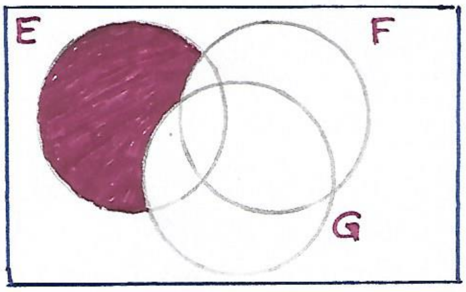
Επιμέλεια: Σ. Σαββάκη

3 Οκτωβρίου 2014

Άσκηση 1

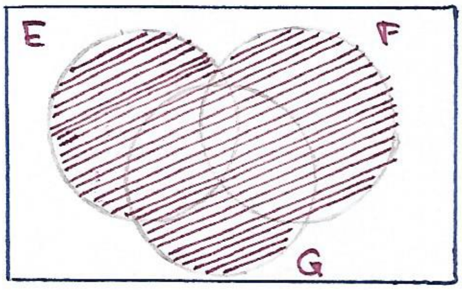
Έστω E, F και G 3 γεγονότα. Βρείτε εκφράσεις για τα γεγονότα έτσι ώστε από τα E, F και G

(α) Μόνο το E να συμβαίνει



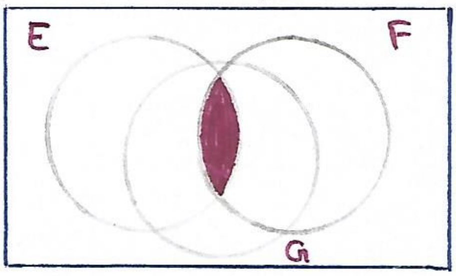
$\rightarrow EF^cG^c$

(β) Τουλάχιστον ένα από τα 3 να συμβαίνουν



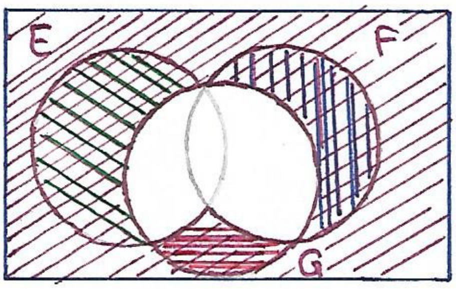
$\rightsquigarrow E \cup F \cup G$

(γ) Και τα 3 να συμβαίνουν



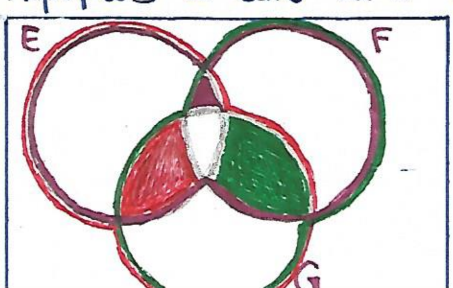
$\rightsquigarrow EFG$

(δ) Το πολύ ένα από τα 3 να συμβαίνει, δηλ. δε συμβαίνει κανένα ή συμβαίνει ακριβώς ένα



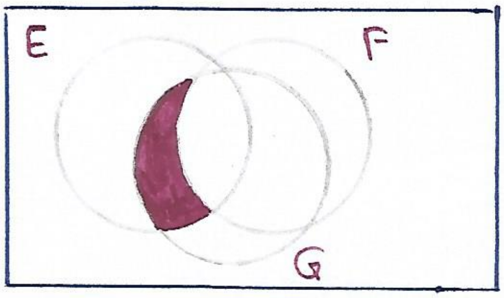
$\rightsquigarrow E^cF^cG^c \cup EF^cG^c \cup E^cFG^c \cup E^cF^cG$

(ε) Ακριβώς 2 από τα 3 να συμβαίνουν



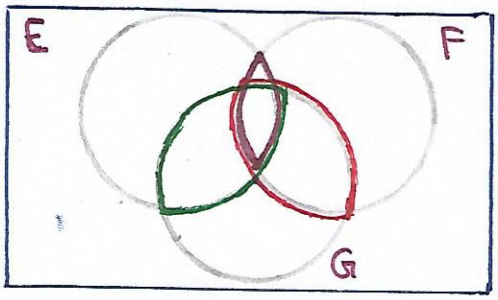
$\rightsquigarrow EFG^c \cup EF^cG \cup E^cFG$

(στ) Να συμβαίνουν τα E και G αλλά όχι το F



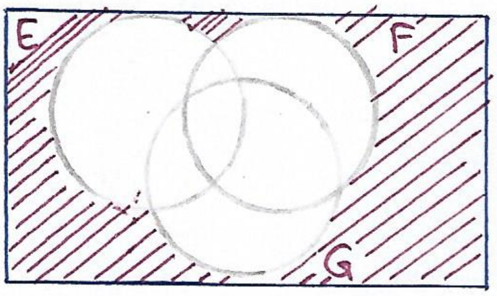
$\rightsquigarrow EF^cG$

(ζ) Τουλάχιστον 2 απο τα γεγονοτα να συμβαίνουν



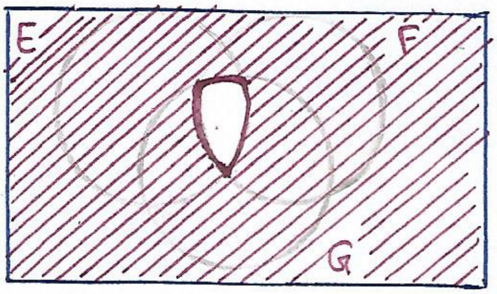
$\rightsquigarrow EF \cup EG \cup FG$

(η) Κανένα απο τα γεγονοτα να μη συμβαίνει



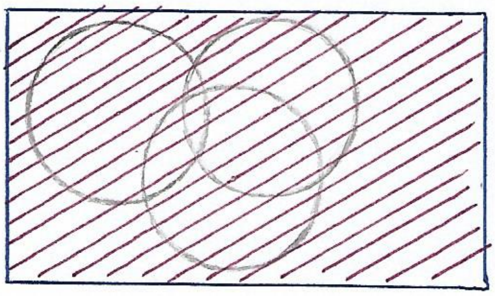
$\rightsquigarrow E^cF^cG^c$

(θ) Το πολύ 2 από αυτά να συμβαίνουν $\rightsquigarrow$ (δηλ να μη συμβαίνουν και τα 3 μαζί)



$\rightsquigarrow (EFG)^c$

(ι) Το πολύ 3 από αυτά να συμβαίνουν



$\rightsquigarrow \Omega$

Άσκηση 2

60% των μαθητών ενός σχολείου δεν φορούν ούτε δαχτυλίδι ούτε κολιέ. 20% φορούν δαχτυλίδι και 30% φορούν κολιέ. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή ποια η πιθανότητα ο μαθητής να φορά

(α) ένα δαχτυλίδι ή ένα κολιέ;

Ορίζουμε τα γεγονότα:

Δ = {ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής φορά δαχτυλίδι}

Κ = {ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής φορά κολιέ}

Μας δίδονται από τα δεδομένα της άσκησης:

$P(\overline{\Delta \cup K}) = 0,6 = P(\bar{\Delta} \cap \bar{K})$ (De Morgan's Law)

$P(\Delta) = 0,2$

$P(K) = 0,3$

Ζητείται: $P(\Delta \cup K) = 1 - P(\overline{\Delta \cup K}) = 1 - 0,6 = 0,4$ η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής να φορά ή δαχτυλίδι ή κολιέ.

(β) ένα δαχτυλίδι και ένα κολιέ;

Ζητείται: $P(\Delta \cap K)$

Γνωρίζουμε ότι $P(\Delta \cup K) = P(\Delta) + P(K) - P(\Delta \cap K)$

$$\Rightarrow P(\Delta \cap K) = P(\Delta) + P(K) - P(\Delta \cup K)$$

$$\Rightarrow P(\Delta \cap K) = 0,2 + 0,3 - 0,4$$

$$= 0,1$$

Άσκηση 3

Τρεις παίχτες A, B και C ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μια περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας ορίστε τα ακόλουθα γεγονότα στον Ω:

(α) A = {κερδίζει ο A}

Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$\Omega = \{000\ldots000\ldots, 1, 01, 001, 0001, \ldots\}$

(το 0 αναπαριστά τα γράμματα και το 1 την κορώνα στην εκάστοτε ρίψη)

Με βάση την παραπάνω περιγραφή το γεγονός A ορίζεται ως:

$A = \{1, 0001, 0000001, \ldots\}$

(β) B = { κερδίζει ο B }

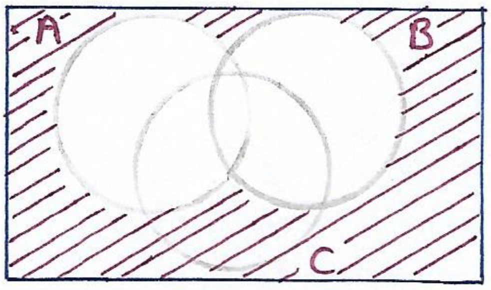
Το γεγονός B ορίζεται ως:

B = { 01, 00001, 000000001, ... }

(γ) $(A \cup B)^c$

Μας ζητείται λοιπον να ορίσουμε το γεγονός να μην κερδίσει κανένας ή να κερδίσει ο παίχτης C

Σχηματικά:



Άρα το συγκεκριμενο γεγονός ορίζεται ως:

$(A \cup B)^c$ = { 000...000..., 001, 000001, ... }

Άσκηση 4

Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπάλες χωρίς επανάθεση.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα και οι 2 μπάλες να είναι άσπρες;

Το κουτί περιέχει συνολικά 20 μπάλες

Έστω A_1 = { Η πρωτη μπάλα που επιλέγουμε είναι άσπρη }

A_2 = { Η δεύτερη μπάλα που επιλέγουμε είναι άσπρη }

Τότε θα έχουμε:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρωτη μπαλα ηταν άσπρη τώρα θα υπάρχουν πλέον στο κουτί 19 μπάλες, εκ των οποίων οι 4 θα είναι άσπρες. Άρα η πιθανοτητα ότι και η 2η μπαλα που επιλέγεται θα είναι ασπρη θα είναι:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλ/κό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες που επιλέγονται θα είναι άσπρες θα είναι:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

(β) Ποια είναι η πιθανοτητα ότι η πρωτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη;

Έστω K_1 = { Η πρωτη μπαλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη }

Τοτε θα έχουμε: $P(K_1) = \frac{15}{20}$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τώρα θα υπάρχουν πλέον 19 μπάλες στο κουτί εκ των οποίων 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία θα είναι άσπρη θα είναι:

$$P(A_2 | K_1) = \frac{5}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολ/κο νόμο, η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(K_1) \cdot P(A_2 / K_1)$$
$$= \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19}$$
$$= \frac{15}{76}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 5}}$

Τα ακόλουθα δεδομένα συλλέχθηκαν σε μια έρευνα ενός συνόλου 1000 συνδρομητών κάποιου περιοδικού αναφορικά με την εργασία, την οικογενειακή κατάσταση και τη μόρφωση. Υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι παν/μίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι παν/μίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι παν/μίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι παν/μίου. Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθηκαν στη μελέτη πρέπει να είναι ανακριβή.

Βοήθεια: Έστω M, W, G τα σύνολα των επαγγελματιών, παντρεμένων και αποφοίτων παν/μίου αντίστοιχα. Υποθέστε ότι ένας από τους 1000 αναγνώστες επιλέγεται τυχαία και δείξτε ότι αν τα νούμερα είναι ακριβή τότε $P(M \cup W \cup G) > 1$

Έστω M = {ένας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι επαγγελματίας}
W = {ένας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι παντρεμένος}
G = {ένας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι απόφοιτος παν/μίου}

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$P(M) = 312/1000$

$P(W) = 470/1000$

$P(G) = 525/1000$

$P(M \cap G) = 42/1000$

$P(W \cap G) = 147/1000$

$P(M \cap W) = 86/1000$

$P(M \cap W \cap G) = 25/1000$

Ν.Δ.Ο: $P(M \cup W \cup G) > 1$

Θα το δείξουμε με πράξεις συνόλων και ιδιότητες:

$$P(M \cup W \cup G) = P((\underbrace{M \cup W}_{A}) \cup \underbrace{G}_{B})$$

Reminder:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G)$$

$$= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P((\underbrace{M \cap G}_{A}) \cup (\underbrace{W \cap G}_{B}))$$

$$= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - (P(M \cap G) + P(W \cap G) - P(M \cap G \cap W))$$

$$= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P(M \cap G) - P(W \cap G) + P(M \cap G \cap W)$$

$$= \frac{312 + 470 - 86 + 525 - 42 - 147 + 25}{1000}$$

$$= \frac{1057}{1000} = 1{,}057 > 1 \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Άσκηση 6

Ο Γιαννης έχει ένα ζευγάρι απο "πειραγμένα" τετράεδρα ζάρια. Σε κάθε ρίψη, η πιθανότητα να φέρει ένα οποιοδήποτε ζεύγος είναι ανάλογη του γινομένου των δύο αριθμών που έφεραν τα ζάρια.

(α) Περιγραψτε το δειγματοχώρο του πειράματος.

Το πρόβλημα ορίζει οτι η πιθανότητα για κάποιο ζευγάρι που ρίχνουμε θα είναι $P(\kappa,\lambda) = c \cdot \kappa \cdot \lambda$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά κανονικοποίησης επειδή $\sum_{\kappa,\lambda} P(\kappa,\lambda) = 1$. Οι τιμές του $\kappa \cdot \lambda$ για όλα τα στοιχεία του δειγματοχωρου δίδονται παρακατω:

1° ζάρι \ 2° ζάρι	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

π.χ. $P(1,3) = c \cdot 1 \cdot 3 = 3c$

$P(2,4) = c \cdot 2 \cdot 4 = 8c$

Προφανώς:
$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots (4,3), (4,4)\}$

Βρίσκουμε τώρα τη σταθερά κανονικοποίησης:

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \sum_{\lambda=1}^{4} (P(\kappa,\lambda)) = 1 \Leftrightarrow 1c + 2c + 3c + 4c + 2c + 4c + 6c + 8c + 3c + 6c + 9c + 12c + 4c + 8c + 12c + 16c = 1$$

$$\Leftrightarrow 100c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Άρα $P(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa \cdot \lambda}{100}$

(β) Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι ζυγός αριθμός;

$$P(\kappa \cdot \lambda = \text{ζυγός}) = P(1,2)+P(1,4)+P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)+P(2,4)$$
$$+P(3,2)+P(3,4)+P(4,1)+P(4,2)+P(4,3)+P(4,4)$$
$$= \frac{1}{100}(2+4+2+4+6+8+6+12+4+8+12+16)$$
$$= \frac{84}{100}$$

(γ) Ποια η πιθανότητα να φέρει το ένα ζάρι 2 και το άλλο 3;

$$P((k=2, \lambda=3) \cup (k=3, \lambda=2)) = P(2,3)+P(3,2)$$
$$= \frac{1}{100}(6+6)$$
$$= \frac{12}{100}$$

Άσκηση 7

Α, Β, Γ είναι τρία γεγονότα κάποιου δειγματοχώρου Ω. Να εκφραστούν με συμβολισμό συνόλων τα εξής γεγονότα:

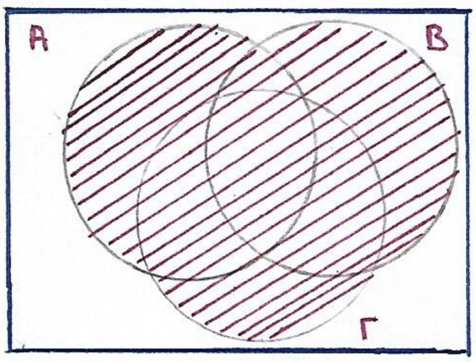
① Τουλάχιστον ένα από τα Α, Β, Γ συμβαίνει

② Ακριβώς ένα και μόνο ένα συμβαίνει

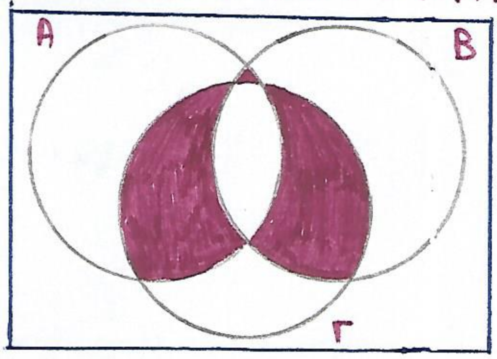
③ Ακριβώς 2 από τα γεγονότα συμβαίνουν

④ Όχι περισσότερα από 2 γεγονότα συμβαίνουν (→ δηλ. να μη συμβούν όλα μαζί)

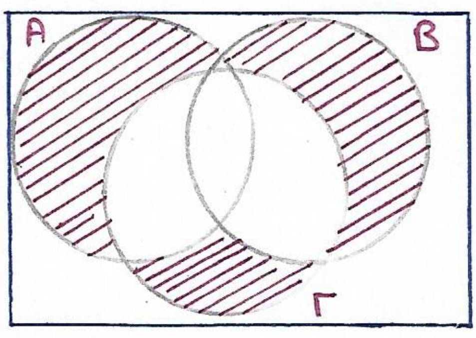
① $A \cup B \cup \Gamma$



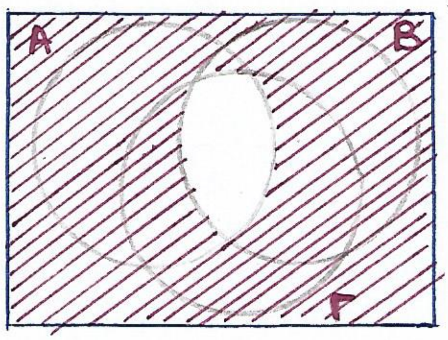
③ $(A \cap B \cap \bar{\Gamma}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \Gamma) \cup (\bar{A} \cap B \cap \Gamma)$



② $(A \cap \bar{B} \cap \bar{\Gamma}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{\Gamma}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap$



④ $\overline{A \cap B \cap \Gamma} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{\Gamma}$



Ποιες οι πιθανότητες 1-4 αν $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=P(\Gamma)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=P(A\cap\Gamma)=P(B\cap\Gamma)=\frac{1}{5}$, $P(A\cap B\cap\Gamma)=\frac{1}{10}$

- $P_1 = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)-P(B\cap\Gamma)+$
$+P(A\cap B\cap\Gamma)$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$
$$= \frac{5}{6}$$

- $P_2 = P(A\cap\bar{B}\cap\bar{\Gamma})+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{\Gamma})+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\Gamma)$ ① ⇝ ξένα/ασυμβίβαστα γεγονότα

$$P(A\cap\bar{B}\cap\bar{\Gamma}) = P(\underbrace{[A-A\cap B]}_{a}-\underbrace{A\cap\Gamma}_{b})$$

Γενικά:
$P(a-b)=P(a)-P(a\cap b)$

$$= P(\underbrace{A}_{a}-\underbrace{A\cap B}_{b})-P([A-A\cap B]\cap(A\cap\Gamma))$$
$$= P(A)-P(A\cap A\cap B)-P(A\cap A\cap\Gamma-A\cap B\cap A\cap\Gamma)$$
$$= P(A)-P(A\cap B)-P(\underbrace{A\cap\Gamma}_{a}-\underbrace{A\cap B\cap\Gamma}_{b})$$
$$= P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)-P(A\cap\Gamma\cap A\cap B\cap\Gamma)$$
$$= P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)-P(A\cap B\cap\Gamma)$$
$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{3}$$

Όμοια: $P(\bar{A}\cap B\cap\bar{\Gamma}) = P([B-A\cap B)]-B\cap\Gamma)$
$$= P(B-A\cap B)-P([B-A\cap B]\cap B\cap\Gamma)$$
$$= P(B)-P(A\cap B)-P(B\cap\Gamma)+P(A\cap B\cap\Gamma)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

και: $P(A\cap B\cap\bar{\Gamma}) = P([\Gamma-A\cap\Gamma]-B\cap\Gamma)$
$$= P(\Gamma-A\cap\Gamma)-P([\Gamma-A\cap\Gamma]\cap(B\cap\Gamma))$$
$$= P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)-P(\Gamma\cap B)+P(A\cap B\cap\Gamma)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

Αντικαθιστώντας στην ①: $P_2=\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{13}{30}$

- $P_3 = P(A\cap B\cap \bar{\Gamma}) + P(A\cap \bar{B}\cap \Gamma) + P(\bar{A}\cap B\cap \Gamma)$ (2)

$P(A\cap B\cap \bar{\Gamma}) = P(A\cap B) - P(A\cap B\cap \Gamma) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

Όμοια: $P(A\cap \bar{B}\cap \Gamma) = P(A\cap \Gamma) - P(A\cap B\cap \Gamma) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

$P(A\cap B\cap \bar{\Gamma}) = P(B\cap \Gamma) - P(A\cap B\cap \Gamma) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $P_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

- $P_4 = P(\overline{A\cap B\cap \Gamma}) = 1 - P(A\cap B\cap \Gamma)$

$$= 1 - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$