10ο Φροντιστήριο ΗΥ217

Επιμέλεια: Σ. Σαββάκη

19 Δεκεμβρίου 2014

Άσκηση 1

Η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1,10]$, $X \sim U[1,10]$, και η τ.μ. Y ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$, $Y \sim \exp(2)$. Υπολογίστε τις πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων:

(α) Η τ.μ. X παίρνει την τιμή 5.

(β) Η τ.μ. X παίρνει τιμή μεγαλύτερη από 5.

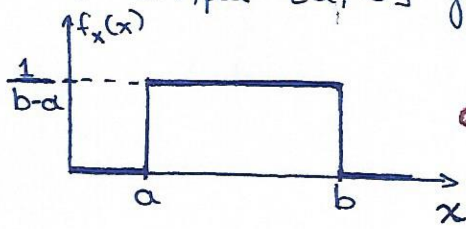
(γ) Η τ.μ. Y είναι μεγαλύτερη από 3, δεδομένου ότι η Y είναι μεγαλύτερη από 1.

(δ) Το ακέραιο μέρος της X είναι ίσο με 1.

(ε) Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της Y είναι ίσο με 2.

Γενικά, για μια ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[a,b]$ γνωρίζουμε ότι:

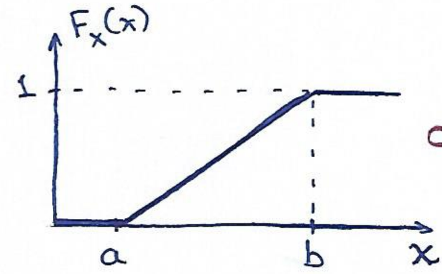
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



σ.π.π.

και α.σ.κ. (CDF)

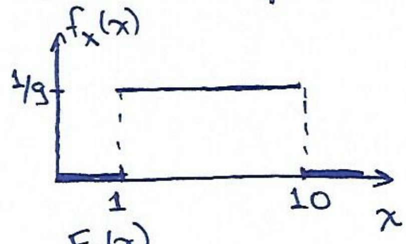
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$



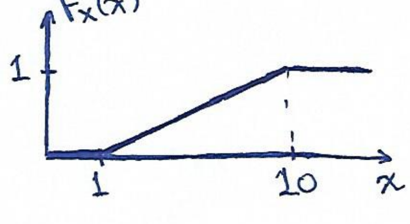
α.σ.κ.

Άρα εδώ για την ομοιόμορφη τ.μ. $X \sim U[1,10]$ θα έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 1 \le x \le 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x-1}{9}, & 1 \le x \le 10 \\ 1, & x \ge 10 \end{cases}$$



Γενικά για την εκθετική κατανομή γνωρίζουμε ότι:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

και

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

Άρα εδώ για την εκθετική τ.μ. $Y \sim \exp(2)$ έχουμε:

$$f_Y(y) = 2 \cdot e^{-2y} \quad , y \geq 0$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-2y} \quad , y \geq 0$$

(α) Για τις συνεχείς τ.μ. γνωρίζουμε ότι για κάθε τιμή a:

$$P(X=a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$$

Άρα $P(X=5) = 0$ για τη συνεχή τ.μ. X.

(β) $P(X>5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = 1 - \frac{5-1}{9} = \frac{5}{9} = 0,56$

(γ) Ζητείται η πιθανότητα $P(Y>3 / Y>1)$

1ος τρόπος:

$$P(Y>3 / Y>1) = \frac{P(Y>3 \cap Y>1)}{P(Y>1)} = \frac{P(Y>3)}{P(Y>1)}$$

$$= \frac{1-P(Y\leq 3)}{1-P(Y\leq 1)} = \frac{1-F_Y(3)}{1-F_Y(1)}$$

$$= \frac{1-(1-e^{-6})}{1-(1-e^{-2})} = \frac{e^{-6}}{e^{-2}} = e^{-4} = 0,018$$

2ος τρόπος:

Για την εκθετική κατανομή έχει δειχθεί στη θεωρία (6.99) η ιδιότητα της έλλειψης μνήμης. Δηλαδή, για την $Y \sim \exp(2)$ γνωρίζουμε ότι:

$$P(Y > y+t \mid Y>y) = P(Y>t)$$

που σημαίνει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ο χρόνος αναμονής Y να υπερβεί το $y+t$, δοθέντος ότι έχει ήδη υπερβεί το y ισούται με την πιθανότητα το Y να υπερβεί το t. Δηλαδή, ο χρόνος που έχει ήδη διαρρεύσει, δεν επηρεάζει το χρόνο που "απαιτείται" για την πραγματοποίηση ενός γεγονότος στο διάστημα $[y, y+t]$.

$$\overset{y=1}{\underset{t=2}{\Longleftrightarrow}} P(Y>3 / Y>1) = P(Y>2) = 1 - F_Y(2) = 1-(1-e^{-4}) = e^{-4} = 0,018$$

(δ) $P(\lfloor X \rfloor = 1) = P(1 \le X < 2) = P(X<2) - P(X<1)$

$= F_X(2) - F_X(1) = \frac{2-1}{9} - \frac{1-1}{9} = \frac{1}{9}$

(ε) Έστω το γεγονός $E = \{$Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της Y είναι ίσο με $2\} = \{Y \in [0.2, 0.3) \cup [1.2, 1.3) \cup [2.2, 2.3) \cup \ldots\}$

Θα έχουμε:

$$P(E) = P(0.2 \le Y < 0.3) + P(1.2 \le Y < 1.3) + P(2.2 \le Y < 2.3) + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k+0.2 \le Y < k+0.3)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (P(Y<k+0.3) - P(Y<k+0.2))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (F_Y(k+0.3) - F_Y(k+0.2))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-e^{-2(k+0.3)}) - (1-e^{-2(k+0.2)})]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-2k-0.4} - e^{-2k-0.6})$$

$$= (e^{-0.4} - e^{-0.6}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k}$$

$$= 0{,}12 \cdot \frac{1}{1-e^{-2}} = 0.14$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

$\boxed{\text{Άσκηση 2}}$

Η τ.μ. X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<1 \\ \frac{1}{3}x & , 1 \le x < 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

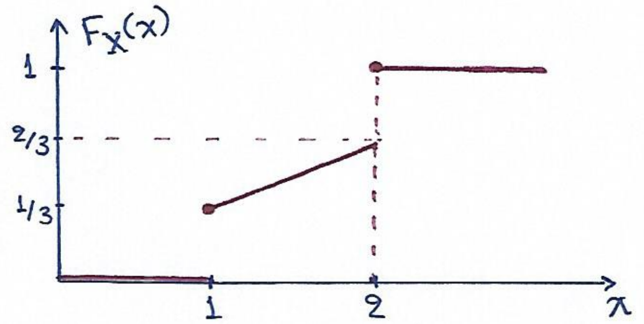
(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$. Τι είδους τ.μ. είναι η X, διακριτή, συνεχής ή μεικτή; Γιατί;

(β) Υπολογίστε και δώστε τη γρ. παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ της X.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X-1|<1)$

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X-1|<1 \mid 1 < X \le 2)$

(α) Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$:

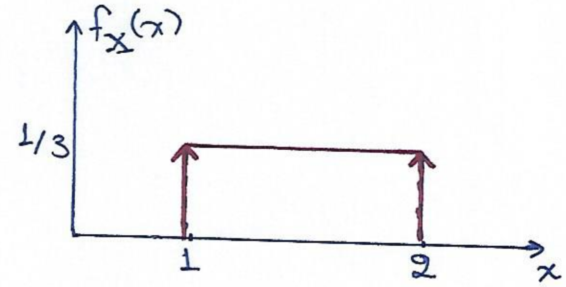


Η τ.μ. X είναι μικτή, διότι έχει δύο ασυνέχειες στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

(β) Από θεωρία έχουμε ότι η $f_X(x)$ προκύπτει παραγωγίζοντας την $F_X(x)$.

Έχουμε λοιπόν $f_X(x) = \dfrac{d F_X(x)}{dx} = \dfrac{1}{3}$. Επίσης, η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $x=1$ και $x=2$ με πιθανότητες $\frac{1}{3}$. Συνεπώς,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & , \quad 1 < x\, 2 \\ \frac{1}{3}\delta(x-1) & \\ \frac{1}{3}\delta(x-2) & \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$$



*Όταν μια συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια σε ένα σημείο, τότε ως παράγωγός της στο σημείο αυτό θα μπαίνει η $\delta(t)$ και μάλιστα πολλαπλασιασμένη με τον κατάλληλο αριθμό κάθε φορά (όσο το "ύψος" της ασυνέχειας).

(γ) $P(|X-1|<1) = P(-1 < X-1 < 1)$ (1)

$$\begin{aligned} &= P(0 < X < 2) \\ &= P(X<2) - P(X \leq 0) \\ &= F_X(2^-) - F_X(0) \\ &= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(δ) $$P(|X-1|<1 \mid 1 < X \leq 2) \overset{(1)}{=} \frac{P(0<X<2 \cap 1<X\leq 2)}{P(1<X\leq 2)}$$

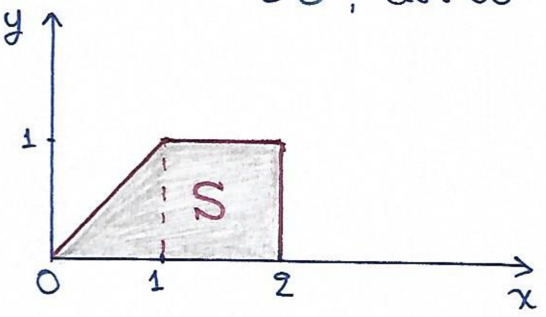
$$= \frac{P(1<X<2)}{P(1<X\leq 2)} = \frac{P(X<2)-P(X\leq 1)}{P(X\leq 2) - P(X\leq 1)}$$

$$= \frac{F_X(2^-) - F_X(1)}{F_X(2) - F_X(1)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 3

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S που φαίνεται στο σχήμα παρακάτω. Οι X και Y έχουν ομοιόμορφη από κοινού κατανομή, δηλαδή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_{X,Y}(x,y)$ είναι σταθερή και ίση με $c>0$ για όλα τα $(x,y) \in S$ και 0 αλλού:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in S \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(α) Υπολογίστε τη σταθερά c.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$

(δ) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. $f_Y(y)$ της τ.μ. Y

(α) Πρέπει να ισχύει: $\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

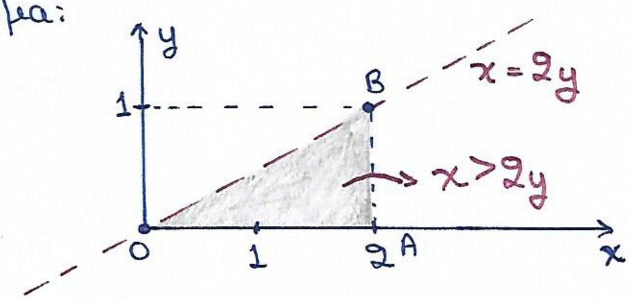
$$\Rightarrow c \cdot E_S = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot \left(\frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{1+2}{2} = 1 \Rightarrow 3c = 2 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

(β) $P(X \geq 2Y) = \iint_{\{x \geq 2y\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

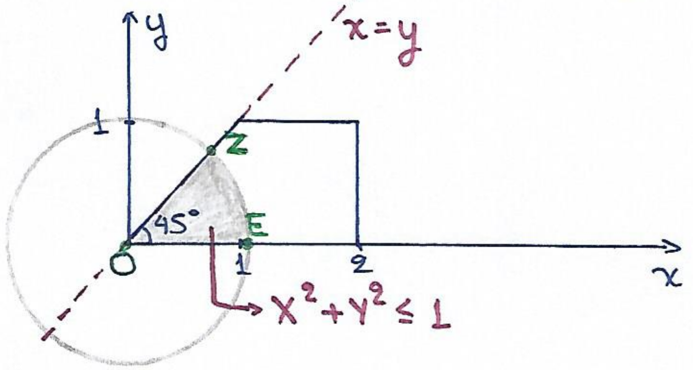
Το εμβαδόν που πρέπει να υπολογιστεί φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



$$\Rightarrow P(X \geq 2Y) = c \cdot E_{OAB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{2}{3}$$

(γ) $P(X^2+Y^2 \geq 1) = 1 - P(X^2+Y^2<1)$

Το εμβαδόν που πρέπει να υπολογιστεί, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



* Προφανώς, είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται μέσα στον κύκλο, γι' αυτό και αντιστρέψαμε την ανισότητα. Παρατηρούμε ότι εφόσον η γωνία που ορίζεται μεταξύ της $y=0$ και της $x=y$ είναι $45°$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\frac{1}{8}$ του κύκλου $X^2+Y^2=1$ με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $r=1$.

Συνεπώς,
$$P(X^2+Y^2 \geq 1) = 1 - P(X^2+Y^2<1)$$
$$= 1 - c \cdot E_{OEZ}$$
$$= 1 - c \cdot \frac{1}{8}\pi \cdot r^2$$
$$= 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\pi \cdot 1^2 = 0{,}738$$

(δ) Για $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$
$$= \int_y^2 \frac{2}{3}\,dx = \frac{2}{3}x \Big|_y^2$$
$$= \frac{2}{3}(2-y)$$

Συνεπώς,
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 4}}$

Έστω οι <u>ανεξάρτητες</u> και <u>όμοια κατανεμημένες</u> τ.μ. $X_1, X_2, \dots X_n$ με κοινή σ.π.π. $f_X(x)$ και α.σ.κ. $F_X(x)$.

(α) Υπολογίστε την α.σ.κ. $F_Y(y)$ και τη σ.π.π. $f_Y(y)$ της τ.μ. $Y = \max(X_1, X_2, \dots X_n)$ συναρτήσει των $F_X(x)$ και $f_X(x)$.

(β) Υπολογίστε την α.σ.κ. $F_Z(z)$ και τη σ.π.π. $f_Z(z)$ της τ.μ. $Z = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$ συναρτήσει των $F_X(x)$ και $f_X(x)$

(γ) Ένα σύστημα αποτελείται από 10 εξαρτήματα των οποίων η διάρκεια ζωής ακολουθεί εκθετική κατανομή, με παράμετρο λ. Κάθε εξάρτημα χαλάει ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα και το σύστημα παύει να λειτουργεί όταν χαλάει το πρώτο εξάρτημα. Ποια πρέπει να είναι η μέση διάρκεια ζωής των εξαρτημάτων, ώστε το σύστημα να λειτουργεί για τουλάχιστον 10 μέρες με πιθανότητα 0.99%;

<u>Βοήθεια</u>: Για το (γ) χρησιμοποιήστε την ανάλυση και το αποτέλεσμα του (β)

(α) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max(X_1, X_2, \dots X_n) \leq y)$ *

$= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y)$

$= P(X_1 \leq y) \cdot P(X_2 \leq y) \cdots P(X_n \leq y)$ (ανεξαρτησία των X_i)

$= F_{X_1}(y) \cdot F_{X_2}(y) \cdots F_{X_n}(y)$

$= F_X^n(y)$ (X_i : όμοια κατανεμημένες)

Επομένως, $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = n \cdot F_X^{n-1}(y) \cdot f_X(y)$

* Μπορώ να αφαιρέσω τον τελεστή max και να το "σπάσω" διότι αφού θέλουμε την πιθανότητα η μέγιστη από τις X_i να είναι $\leq y$, τότε όλες οι X_i θα πρέπει να είναι $\leq y$.

(β) $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min(X_1, X_2, \dots X_n) \leq z)$ X

Από εδώ δε μπορώ να προχωρήσω, διότι θέλω την ελάχιστη από τις $X_i \leq z$, δε μπορώ να αφαιρέσω τον τελεστή min.

<u>Άρα</u>:

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z)$

$= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots X_n) > z)$*

$= 1 - P(X_1 > z) \cdot P(X_2 > z) \cdots P(X_n > z)$

$= 1 - (1 - P(X_1 \leq z)(1 - P(X_2 \leq z) \cdots$

$\cdots (1 - P(X_n \leq z)$

$= 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z))$

$= 1 - [1 - F_X(z)]^n$

Επομένως, $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = n[1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_X(z)$

* Μπορώ να αφαιρέσω τον τελεστή min και να το "σπάσω", διότι αφού θέλουμε την πιθανότητα η ελάχιστη X_i να είναι $> z$, τότε όλες θα πρέπει να είναι $> z$

(γ) Έχουμε τις 10 ανεξάρτητες τ.μ. X_i $(i=1,2,\dots 10)$ με $X_i \sim exp(\lambda)$. Καθώς το σύστημα παύει να λειτουργεί όταν χαλάει το πρώτο εξάρτημα, η διάρκεια ζωής του, που χαρακτηρίζεται από την τ.μ. Z θα είναι:

$$Z = min(X_1, X_2, \dots X_{10})$$

Από το **(β)**, έχουμε ότι η α.σ.κ. της τ.μ. Z είναι:

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^{10} \rightarrow \text{όπου } F_X(z) = 1 - e^{-\lambda z}, \ z \geq 0$$

αφού $X_i \sim exp(\lambda)$ και $n=10$

$$= 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda z})]^{10}$$
$$= 1 - (1 - 1 + e^{-\lambda z})^{10}$$
$$= 1 - e^{-10\lambda z}$$

Θέλουμε να ισχύει ότι:

$$P(Z \geq 10) = 0{,}99 \Rightarrow P(Z < 10) = 0{,}01$$
$$\Rightarrow F_Z(10) = 0{,}01$$
$$\Rightarrow 1 - e^{-100\lambda} = 0{,}01$$
$$\Rightarrow e^{-100\lambda} = 0{,}99$$
$$\Rightarrow \ln(e^{-100\lambda}) = \ln(0{,}99)$$
$$\Rightarrow -100\lambda = -0{,}01$$
$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}0001}$$

Επομένως, η μέση διάρκεια ζωής των εξαρτημάτων θα πρέπει να είναι:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}0001} = 10000 \text{ ημέρες},$$ ώστε το σύστημα να λειτουργεί για τουλάχιστον 10 ημέρες με πιθανότητα 0.99%.

Άσκηση 5

(α) Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 10$ και διασπορά $\sigma^2 = 16$: $X \sim N(10, 16)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$:

(i) $P(X \leq 5)$

(ii) $P(X^2 \geq 400)$

(iii) $P(X = 2)$

(β) Υποθέστε ότι μια γεννήτρια τυχαίων μεταβλητών σας δίνει δείγματα από μια Γκαουσιανή τ.μ. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Περιγράψτε πώς θα χρησιμοποιήσετε τα δείγματα της X για να δημιουργήσετε δείγματα μιας άλλης τ.μ. $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(γ) Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέσες τιμές $\mu_X = \mu_Y = 0$, διασπορές $\sigma_X^2 = 5$, $\sigma_Y^2 = 2$ και συνδιασπορά $cov(X, Y) = -1$. Ορίζουμε τη νέα Γκαουσιανή τ.μ. $Z = X + 2Y$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z \geq 1)$

(α) Γνωρίζουμε ότι η τυπική Γκαουσιανή τ.μ. Y προέρχεται από τη γενική τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μέσω του μετασχηματισμού $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
Γενικά, για την CDF της γενικής τ.μ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ έχουμε:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

όπου $\Phi(y)$ είναι η CDF της σταντάρντ κανονικής $Y \sim N(0,1)$

(i) $$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X-10}{4} \leq \frac{5-10}{4}\right) = P\left(Y \leq -\frac{5}{4}\right) = \Phi\left(-\frac{5}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right)$$

$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$

(ii) $$P(X^2 \geq 400) = P(X \geq 20 \cup X \leq -20) \quad (\text{ξένα})$$
$$= P(X \geq 20) + P(X \leq -20)$$
$$= 1 - P(X < 20) + P(X \leq -20)$$
$$= 1 - P\left(\frac{X-10}{4} < \frac{20-10}{4}\right) + P\left(\frac{X-10}{4} \leq \frac{-20-10}{4}\right)$$
$$= 1 - P\left(Y < \frac{10}{4}\right) + P\left(Y \leq -\frac{30}{4}\right)$$
$$= 1 - \Phi(2,5) + \Phi(-7,5)$$

$= 1 - \Phi(2,5) + 1 - \Phi(7,5)$

$= 2 - \Phi(2,5) - \Phi(7,5)$

(iii) $P(X=2) = 0$, αφού η τ.μ. X είναι συνεχής.

(β) Γνωρίζουμε ότι αν η τ.μ. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, τότε η τ.μ. $\boxed{Y = aX + b}$ είναι επίσης κανονική με $Y \sim N(a\mu_1 + b,\ a^2\sigma_1^2)$, δηλαδή η "κανονικότητα" διατηρείται κάτω από το γραμμικό μετασχηματισμό.

Όμως εμείς (από εκφώνηση) θέλουμε να έχουμε $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
Συνεπώς, για να βρούμε τα a, b που ικανοποιούν το ζητούμενο μετασχηματισμό:

$$\left.\begin{array}{l} a\mu_1 + b = \mu_2 \\ a^2\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + b = \mu_2 \\ a = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{b = \mu_2 - \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1} \\ \boxed{a = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}} \end{array}$$

Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός $Y = aX + b$ είναι:

$$Y = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}X + \mu_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 \Rightarrow \boxed{Y = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X - \mu_1) + \mu_2}$$

(γ) Για τη νέα Γκαουσιανή τ.μ. Z έχουμε:

$\mu_Z = E[Z] = E[X + 2Y] = E[X] + 2E[Y] = 0 + 2 \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned}
\sigma_Z^2 &= var(Z) = E[Z^2] - (\cancel{E[Z]})^2 \\
&= E[Z^2] = E[(X + 2Y)^2] \\
&= E[X^2 + 4Y^2 + 4XY] \\
&= E[X^2] + 4E[Y^2] + 4E[X \cdot Y] \\
&= [var(X) + (E[X])^2] + 4[var(Y) + (E[Y])^2] + 4[cov(X,Y) + E[X] \cdot E[Y]] \\
&= 5 + 0 + 4(2 + 0) + 4(-1 + 0 \cdot 0) = 9
\end{aligned}$$

$E[aX + b] = aE[X] + b$
$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
$cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

Άρα η τ.μ. Z ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_Z = 0$ και διασπορά $\sigma_Z^2 = 9$, $Z \sim N(0, 9)$.

Επομένως, $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P\left(\dfrac{Z - 0}{3} < \dfrac{1 - 0}{3}\right)$

$= 1 - P\left(Y < \dfrac{1}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{1}{3}\right)$