

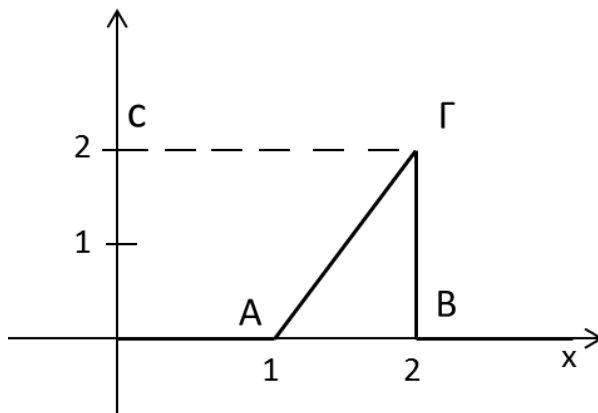
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**Θεωρία Πιθανοτήτων
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 19 Ιανουαρίου 2015

Θέμα 1.

(α) Η γραφική παράσταση της σ.π.π. $f_X(x)$ φαίνεται στο σχήμα 1:



Υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς c . Πρέπει:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= 1 \Rightarrow \int_1^2 c(x-1) dx = 1 \Rightarrow \\ \left. \frac{1}{2}cx^2 - cx \right|_1^2 &= 1 \Rightarrow 2c - 2c - \frac{1}{2}c + c = 1 \Rightarrow c = 2\end{aligned}$$

Αλλιώς, υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου (ABΓ):

$$E_{AB\Gamma} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot c = 1 \Rightarrow c = 2$$

(β) Η μέση τιμή της τ.μ X δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_1^2 x \cdot 2 \cdot (x-1) dx \\ &= 2 \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left. \frac{2}{3}x^3 - x^2 \right|_1^2 \\ &= \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3} = 1.67\end{aligned}$$

Για να βρούμε τη διασπορά, πρώτα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_1^2 x^2 \cdot 2 \cdot (x-1) dx \\ &= 2 \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = \left. \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right|_1^2 \\ &= 8 - \frac{16}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 2.83\end{aligned}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 2.83 - 1.67^2 = 0.044$$

(γ) Προφανώς, $F_X(x) = 0$, για $x < 1$ και $F_X(x) = 1$, όταν $x \geq 2$.

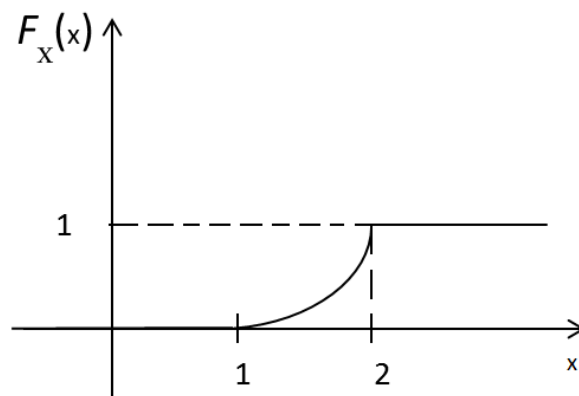
Για $1 \leq x < 2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = \int_1^x 2(t-1) dt = t^2 - 2t \Big|_1^x \\ &= x^2 - 2x - 1 + 2 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \end{aligned}$$

Επομένως η $F_X(x)$ γίνεται:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ (x-1)^2, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Το διάγραμμα της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής είναι:



(δ) (i) Θεωρούμε το ενδεχόμενο: $A = \{X > 1.5\}$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X > 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - F_X(1.5) \\ &= 1 - (1.5 - 1)^2 = 0.75 \end{aligned}$$

(ii) Θεωρούμε το ενδεχόμενο: $B = \{1.2 < X < 2.5\}$

$$P(B) = P(1.2 < X < 2.5) = F_X(2.5) - F_X(1.2) = 1 - (1.2 - 1)^2 = 0.96$$

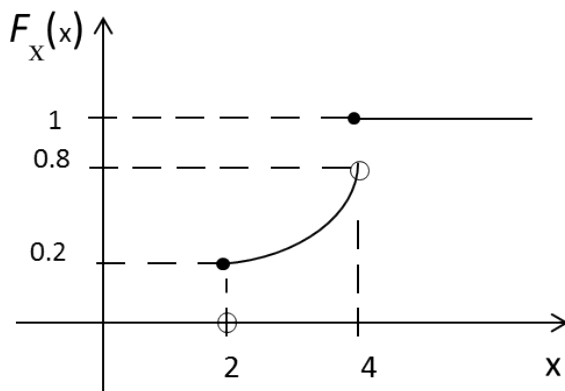
(ε) Έχουμε: $A \cap B = \{X > 1.5\} \cap \{1.2 < X < 2.5\} = \{1.5 < X < 2.5\}$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(1.5 < X < 2.5) \\ &= F_X(2.5) - F_X(1.5) = 0.75 \\ &\neq 0.75 \times 0.96 = P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

Συνεπώς, τα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

Θέμα 2.

(α) Η τ.μ X είναι μικτή διότι η α.σ.κ $F_X(x)$ παρουσιάζει ασυνέχειες για $x = 2$ και για $x = 4$. Η γραφική της παράσταση είναι:



(β) Για $2 < x < 4$, έχουμε:

$$f_x(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{x}{10}$$

Επίσης:

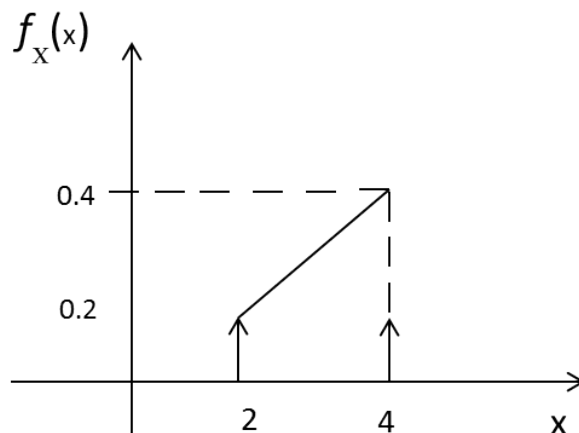
$$P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-) = 0.2 - 0 = 0.2$$

$$P(X = 4) = F_X(4) - F_X(4^-) = 1 - 0.8 = 0.2$$

Επομένως:

$$f_X(x) = \begin{cases} x/10, & 2 < x < 4 \\ 0.2\delta(x-2) \\ 0.2\delta(x-4) \\ 0 & \text{αλλού,} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας γίνεται:



(γ)

$$\begin{aligned} P(|X - 2| < 2) &= P(-2 < X - 2 < 2) = P(0 < X < 4) \\ &= F_X(4^-) - F_X(0) = 0.8 - 0 = 0.8 \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(|X - 2| < 2 | 2 < X \leq 4) &= \frac{P((|X - 2| < 2) \cap (2 < X \leq 4))}{P(2 < X \leq 4)} \\ &= \frac{P((0 < X < 4) \cap (2 < X \leq 4))}{P(2 < X \leq 4)} \\ &= \frac{P(2 < X < 4)}{P(2 < X \leq 4)} \\ &= \frac{F_X(4^-) - F_X(2)}{F_X(4) - F_X(2)} = \frac{0.8 - 0.2}{1 - 0.2} = 0.75 \end{aligned}$$

Θέμα 3.

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\sqrt{|1 + X|} > 4) &= P(|1 + X| > 16) \\ &= P((1 + X > 16) \cup (1 + X < -16)) = P((X > 15) \cup (X < -17)) \\ &= P(X > 15) + P(X < -17) = 1 - P(X \leq 15) + P(X < -17) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 5}{10} \leq \frac{15 - 5}{10}\right) + P\left(\frac{X - 5}{10} < \frac{-17 - 5}{10}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) + \Phi(-2.2) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(2.2) \\ &= 2 - \Phi(1) - \Phi(2.2) \end{aligned}$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από:

$$\begin{aligned} P((5X + 1)(2Y - 3) > 0) &= P[(5X + 1 > 0 \cap 2Y - 3 > 0) \cup (5X + 1 < 0 \cap 2Y - 3 < 0)] \\ &= P(5X + 1 > 0 \cap 2Y - 3 > 0) + P(5X + 1 < 0 \cap 2Y - 3 < 0) \\ \text{ξένα μεταξύ τους} &= P(5X + 1 > 0)P(2Y - 3 > 0) + P(5X + 1 < 0)P(2Y - 3 < 0) \\ X, Y: \text{ανεξάρτητες} &= P(X > \frac{-1}{5}) P(Y > 3/2) + P(X < -1/5) P(Y < 3/2) \\ &= P\left(\frac{X - 5}{10} > \frac{\frac{-1}{5} - 5}{10}\right) P\left(\frac{Y - 2}{5} > \frac{3/2 - 2}{5}\right) \\ &+ P\left(\frac{X - 5}{10} < \frac{-1/5 - 5}{10}\right) P\left(\frac{Y - 2}{5} < \frac{3/2 - 2}{5}\right) \\ &= [1 - \Phi(-0.52)][1 - \Phi(-0.1)] + \Phi(-0.52)\Phi(-0.1) \\ &= \Phi(0.52)\Phi(0.1) + [1 - \Phi(0.52)][1 - \Phi(0.1)] \\ &= \Phi(0.52)\Phi(0.1) + 1 - \Phi(0.1) - \Phi(0.52) + \Phi(0.52)\Phi(0.1) \\ &= 1 - \Phi(0.1) - \Phi(0.52) + 2\Phi(0.52)\Phi(0.1) \end{aligned}$$

(γ) Η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ Z δίνονται αντίστοιχα, από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[5X - 2Y] = 5E[X] - 2E[Y] = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 21 \\ \text{var}(Z) &= \text{var}(5X - 2Y) = \text{var}(5X) + \text{var}(-2Y), \quad X, Y: \text{ανεξάρτητες} \\ &= 25\text{var}(X) + 4\text{var}(Y) = 25 \cdot 100 + 4 \cdot 25 = 2600 \end{aligned}$$

(δ) Εμβαδόν: $W = \frac{1}{2}XY$

Το μέσο εμβαδόν δίνεται από:

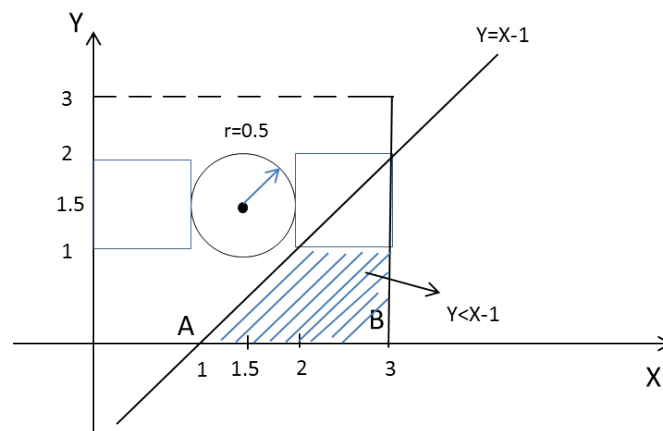
$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{1}{2}E[XY] = \frac{1}{2}E[X] \cdot E[Y] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \end{aligned}$$

Θέμα 4.

(α) Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_{S_{XY}} &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7 \\ c \cdot E_{S_{XY}} &= 1 \Rightarrow c \cdot 7 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

(β) Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα:



Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(Y < X - 1) = E_{AB\Gamma\Delta} \cdot c = \frac{(2+1) \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{14} \quad (1)$$

(γ) Είναι η πιθανότητα να βρεθούμε εκτός ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $(1.5, 1.5)$ και ακτίνα $r = 0.5$

$$P\left[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > 0.5^2\right] = 1 - \pi \cdot 0.5^2 \cdot \frac{1}{7} = 0.8878$$

(δ) Έχουμε: $f_X(x) = 0$ για $x < 0$ και $x \geq 3$

Για $0 \leq x < 1$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=0}^1 c dy + \int_{y=2}^3 c dy = \frac{1}{7}y \Big|_0^1 + \frac{1}{7}y \Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{7}(1-0) + \frac{1}{7}(3-2) = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Για $1 \leq x < 2$,

$$f_X(x) = \int_{y=0}^3 c dy = \frac{1}{7}y \Big|_0^3 = \frac{3}{7}$$

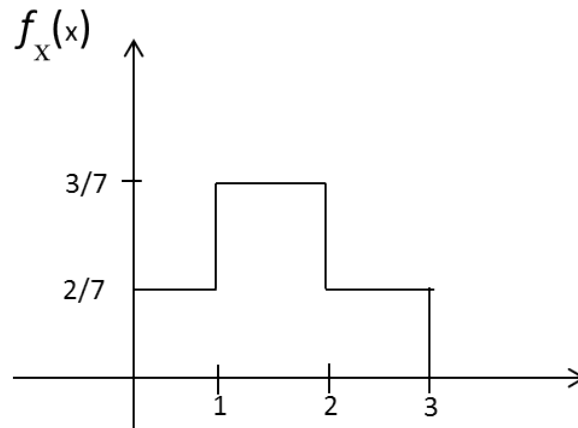
Για $2 \leq x < 3$,

$$f_X(x) = \int_{y=0}^1 c dy + \int_{y=2}^3 c dy = \frac{2}{7}$$

Οπότε έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/7, & 0 \leq x < 1 \text{ και } 2 \leq x < 3 \\ 3/7, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της περιθωριακής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θέμα 5.

(α) Προφανώς η τ.μ Y παίρνει τιμές $0, 1, 2, 3, \dots$. Είναι διακριτή! Επομένως έχουμε:

$$P_Y(k) = P(Y = k) = P(k \leq X < k + 1) = F_X(k + 1) - F_X(k)$$

Όμως, η $X \sim \exp(\lambda)$, με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
Συνεπώς ισχύει:

$$P_Y(k) = 1 \cdot e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ Y έχει σ.π.π. της μορφής:

$$P_Y(k) = (1 - p)p^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ με } p = e^{-\lambda}$$

Δηλαδή, η τ.μ Y ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με $p = e^{-\lambda}$. $Y \sim Geo(e^{-\lambda})$

(β) Προφανώς, $0 \leq Z = X - \lfloor X \rfloor < 1$. Η Z είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών το $[0, 1)$. Για $0 \leq z < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(0 \leq Z < z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leq X \leq k + z) = \sum_{k=0}^{\infty} [F_X(k + z) - F_X(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 - e^{-\lambda(k+z)} - (1 - e^{-\lambda k})] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda z})e^{-\lambda k} = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Οπότε, η σ.π.π γίνεται:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}$$