

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
19 Ιανουαρίου 2015 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Οι εβδομαδιαίες πωλήσεις ενός δημοφιλούς αναψυκτικού στο τοπικό σούπερ μάρκετ (μετρημένες σε χιλιάδες λίτρα) ακολουθούν μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x-1) & \text{αν } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) (4 μονάδες) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π.
(β) (4 μονάδες) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, $var(X)$, της τ.μ. X .
(γ) (4 μονάδες) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$, της X .
(δ) (4 μονάδες) Ποια η πιθανότητα ότι οι εβδομαδιαίες πωλήσεις του αναψυκτικού (i) ξεπερνούν τα 1500 λίτρα, (ii) είναι μεταξύ 1200 και 2500 λίτρων;
(ε) (4 μονάδες) Αν A και B είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Η τ.μ. X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{20}x^2 & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

- (α) (5 μονάδες) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$. Τι είδους τ.μ. είναι η X , διακριτή, συνεχής, ή μεικτή; Γιατί;
(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$, της X .
(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X-2| < 2)$.
(δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(|X-2| < 2 \mid 2 < X \leq 4)$.

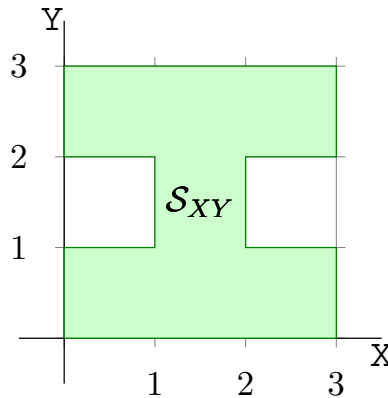
Θέμα 3 - 20 μονάδες. Δύο ανεξάρτητες τ.μ. X και Y ακολουθούν Γκαουσιανές κατανομές με μέσες τιμές 5 και 2 και διασπορές 100 και 25, αντίστοιχα. Δηλαδή, $X \sim N(5, 100)$ και $Y \sim N(2, 25)$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

- (α) (5 μονάδες) $P(\sqrt{|1+X|} > 4)$.
(β) (5 μονάδες) $P((5X+1)(2Y-3) > 0)$.
(γ) (5 μονάδες) Τη μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. $Z = 5X - 2Y$.
(δ) (5 μονάδες) Το μέσο εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση X και ύψος Y .

Σημείωση: Οι πιθανότητες να εκφραστούν συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(\cdot)$.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S_{XY} που φαίνεται στο Σχήμα 1. Οι X και Y έχουν ομοιόμορφη από κοινού κατανομή, δηλαδή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_{X,Y}(x,y)$ είναι σταθερή και ίση με $c > 0$ για όλα τα $(x,y) \in S_{XY}$ και 0 αλλού:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & (x,y) \in S_{XY}, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Σχήμα 1: Το πεδίο τιμών για τις τ.μ. (X, Y) του θέματος 4.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη σταθερά c .
 (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y < X - 1)$.
 (γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > 0.5^2]$.
 (δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π., $f_X(X)$, της τ.μ. X .

Θέμα 5 - 20 μονάδες. (Κβάντιση) Έστω $X \sim \exp(\lambda)$ μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ . Έστω $Y = \lfloor X \rfloor$ το ακέραιο μέρος της X . Δηλαδή, αν $k \leq X < k + 1$ τότε $Y = k$ για $k = 0, 1, 2, \dots$

- (α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y . Αναγνωρίζετε την κατανομή της τ.μ. Y ;
 (β) (10 μονάδες) Ορίστε το σφάλμα κβάντισης ως $Z = X - \lfloor X \rfloor$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z .