

HY-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/12/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/1/2015

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (II).

Άσκηση 1. Μία εταιρία παράγει κινητά τηλέφωνα. Στο ηλεκτρονικό κύκλωμα του μοντέλου i-talk2much υπάρχει αντίσταση της οποίας η τιμή R είναι τ.μ. με μέση τιμή $\mu_R = 1k\Omega$ και διασπορά $\sigma_R^2 = 10^4\Omega^2$. Το σταθερό ρεύμα έντασης $I = 1mA$ διαρρέει την αντίσταση από το άκρο A στο άκρο B δημιουργώντας μία διαφορά δυναμικού $V_A - V_B = IR$ στα άκρα της αντίστασης, όπου V_A και V_B είναι οι τάσεις (σε Volts) στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Μας δίνεται ότι η τάση στο σημείο B είναι $V_B = 1V$.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τάσης V_A στο σημείο A.

(β) Έστω ότι η αντίσταση R έχει Γκαουσιανή κατανομή, $R \sim N(1k\Omega, 10^4\Omega^2)$. Το ηλεκτρονικό κύκλωμα του τηλεφώνου λειτουργεί ομαλά όταν $1.95V < V_A < 2.05V$. Υπολογίστε την πιθανότητα να λειτουργεί ένα τυχαία επιλεγμένο κινητό. (Έχουμε ότι $\Phi(0.5) = 0.6915$.)

(γ) Η χαμηλή τιμή της πιθανότητας στο (β) δημιουργεί ανησυχία στην εταιρία ότι θα χάσει το μερίδιο της αγοράς. Ο διευθύνων σύμβουλος της εταιρίας αναθέτει στην ομάδα των μηχανικών να ανεβάσει την πιθανότητα στο 90%. Οι μηχανικοί αποφασίζουν να αντικαταστήσουν την αντίσταση με μία καλύτερη, η οποία έχει μικρότερη διασπορά στην τιμή της. Ποια πρέπει να είναι η διαφορά ώστε η πιθανότητα σωστής λειτουργίας του κινητού να φτάσει στο 90%;

Άσκηση 2. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S που φαίνεται στο Σχήμα 1. Οι X και Y έχουν ομοιόμορφη από κοινού κατανομή, δηλαδή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_{X,Y}(x,y)$ είναι σταθερή και ίση με $c > 0$ για όλα τα $(x,y) \in S$ και 0 αλλού:

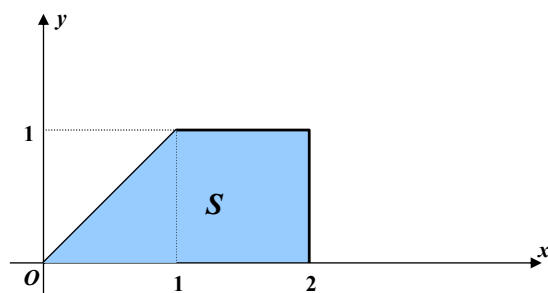
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & (x,y) \in S, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά c .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < 3Y)$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y < 1/2)$.

(δ) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π., $f_X(x)$, της τ.μ. X .

Σχήμα 1: Το πεδίο τιμών για τις τ.μ. (X, Y) της Άσκησης 2.

Άσκηση 3. Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-2} & |x| \geq 1, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ορίζουμε τη νέα τ.μ. Y ως

$$Y = \text{sign}(X + 2),$$

όπου

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Τι είδους τ.μ. είναι η Y ; Υπολογίστε την κατανομή της.

Άσκηση 4. Έστω τρεις ανεξάρτητες τ.μ. X , Y και W . Οι τ.μ. X και Y είναι εκθετικά κατανεμμένες με παράμετρο λ ενώ η τ.μ. W είναι Bernoulli με παράμετρο $p = 1/2$. Ορίζουμε τη νέα τ.μ. Z ως:

$$Z = WX - (1 - W)Y.$$

Με άλλα λόγια, η τ.μ. Z ισούται με την τ.μ. X όταν $W = 1$, ενώ η Z ισούται με $-Y$ όταν $W = 0$.

(α) Υπολογίστε και δώστε τις γραφικές παραστάσεις για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Z(z)$, και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Z(z)$, της τ.μ. Z . Αναγνωρίζετε την κατανομή της Z ;

Βοήθεια: Για να βρείτε το $F_Z(z)$, χρησιμοποιείτε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, υπολογίζοντας πρώτα την $F_{Z/W}(z/w)$ όταν $W = 1$ και $W = 0$.

(β) Μετασχηματίζουμε τη τ.μ. Z ως εξής:

$$V = g(Z) = \begin{cases} Z + 1, & -1 \leq Z < 0, \\ 1 - \frac{Z}{3}, & 0 \leq Z < 3, \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

(β-ι) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $V = g(Z)$.

(β-ii) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{V = 0\}$.

(β-iii) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_V(v)$, και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_V(v)$, της τ.μ. V .