

ΗΥ-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/12/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 17/12/2014

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Άσκηση 1. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ΗΥ (σε χιλιάδες κομμάτια) που πουλάει η Dell στη διάρκεια μιας μέρας είναι μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & \text{αν } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X .

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι ο αριθμός των ΗΥ που πωλούνται σε μία μέρα (i) ξεπερνά τις 3000, (ii) είναι μεταξύ 1500 και 9000;

(δ) Αν A και B είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2. Ένα εργοστάσιο ζάχαρης έχει τρεις γραμμές επεξεργασίας. Η ποσότητα ζάχαρης που παράγεται από κάθε γραμμή επεξεργασίας είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 (τόνους). Υποθέτουμε, επίσης, ότι κάθε γραμμή λειτουργεί ανεξάρτητα από τις άλλες.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα μία τυχαία γραμμή να παράγει περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης.

(β) Ποια η πιθανότητα 2 ακριβώς από τις 3 γραμμές να παράγουν περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης;

(γ) Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον μία από τις γραμμές να παράγει περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης (γεγονός Ε);

(δ) Καταγράφουμε για ένα διάστημα 100 ημερών τις ημέρες που παρατηρείται το γεγονός Ε. Ποια η πιθανότητα να έχουμε καταγράψει περισσότερες από 55 μέρες;

Άσκηση 3. Ο Κώστας και ο Χρήστος είναι συγκατοικοί και μοιράζονται την ίδια τηλεφωνική γραμμή. Ο υπολογιστής του Κώστα αυτόματα κάνει dial up για να ελέγξει το e-mail του κάθε μισή ώρα, στις XX:15 και XX:45. Αυτός είναι και ο μοναδικός λόγος που ο Κώστας χρησιμοποιεί το τηλέφωνο και μπορείτε να υποθέσετε ότι αυτά τα dial ups είναι ακαριαία, διακριτά γεγονότα.

Η κοπέλα του Χρήστου τηλεφωνεί στις 10:00 και η διάρκεια της κλήσης είναι μία συνεχής τ.μ. T με εκθετική κατανομή. Καθώς μόλις έχουν γνωριστεί, η μέση διάρκεια της κλήσης είναι 60 λεπτά. Αυτή είναι και η μόνη φορά που ο Χρήστος χρησιμοποιεί το τηλέφωνο. Αν ο Χρήστος μιλάει όταν ο υπολογιστής του Κώστα προσπαθεί να κάνει dial up, ο Κώστας δεν μπορεί να ελέγξει το e-mail του.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι ο Κώστας δεν μπορεί να ελέγξει μία ή περισσότερες φορές το e-mail του;

(β) Έστω N ο αριθμός των χαμένων ελέγχων του e-mail. Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_N(n) = P(N = n)$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Υπόδειξη. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση $n = 0$. Κατόπιν για $n = 1, 2, \dots$, η απάντηση θα είναι στην μορφή $p_N(n) = ae^{-bn}$, όπου θα πρέπει να βρείτε τις σταθερές a και b .

(γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των ελέγχων του e-mail που χάνει ο Κώστας;

Άσκηση 4. Η τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.):

$$F_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \in (-\infty, -3] \\ \frac{1}{3} & x \in (-3, -2) \\ \frac{1}{12}x + \frac{7}{12} & x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{16}(x+1)^2 + \frac{1}{2} & x \in (-1, 1) \\ \alpha & x = 1 \\ \beta - \frac{1}{8}e^{-(x-1)} & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

όπου α και β είναι σταθερές.

(α) Υπολογίστε τις σταθερές α και β οι οποίες καθιστούν την $F_X(x)$ μία έγκυρη α.σ.κ.

(β) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

(γ) Τι είδους τ.μ. είναι η X (διακριτή, συνεχής, μεικτή); Γιατί;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X < -3)$;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = -2)$;

(στ) Ποια είναι η πιθανότητα $P(|X| < 1)$;

Άσκηση 5. Ο δείκτης νοημοσύνης (IQ) ενός τυχαία επιλεγμένου ατόμου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 100 και τυπική απόκλιση 15, $IQ \sim N(100, 15^2)$. Στις ακόλουθες ερωτήσεις, οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(\cdot)$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το IQ ενός τυχαία επιλεγμένου ατόμου είναι μεγαλύτερο από 140.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το IQ ενός τυχαία επιλεγμένου ατόμου παίρνει τιμές μεταξύ 120 και 130.

(γ) Για ποια τιμή u το 99% του πληθυσμού έχει IQ τουλάχιστον u ; Σας δίνεται ότι $\Phi(2.33) = 0.99$.

Άσκηση 6. Η ονομαστική τάση μίας πηγής ισχύος είναι 12 volts. Λόγω τυχαίων μεταβολών, η πραγματική τιμή της τάσης ανά πάσα χρονική στιγμή είναι $V = 12 + 2X$, όπου η X είναι Γκαουσιανή τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και διασπορά ίση με 0.1, $X \sim N(0, 0.1)$. Μετράμε την τάση της πηγής κάθε ώρα και αν η τιμή της βρίσκεται έξω από το διάστημα τιμών $[11, 13]$, η πηγή πρέπει να ρυθμιστεί. Υπολογίστε την πιθανότητα να μη χρειαστεί καμία ρύθμιση στη διάρκεια 24 ωρών. Υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις που κάνουμε κάθε ώρα είναι ανεξάρτητες τ.μ.