

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 7/11/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/11/2014

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (II).

Άσκηση 1. Η εταιρία Αττικό Μετρό δημιουργεί τους συρμούς του ΗΣΑΠ στη γραμμή Πειραιάς-Κηφισιά με τον εξής αλγόριθμο: Στο μηχανοστάσιο του Πειραιά υπάρχουν συνολικά 6 βαγόνια. Αν ένα βαγόνι λειτουργεί, τότε προστίθεται στο συρμό. Αν δεν λειτουργεί, τότε παραμένει στο μηχανοστάσιο. Ένα τυχαία επιλεγμένο βαγόνι λειτουργεί με πιθανότητα $2/3$, ανεξάρτητα από όλα τα υπόλοιπα. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως το μήκος του συρμού, δηλαδή το πλήθος των βαγονιών που τον αποτελούν.

(α) Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. X ; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης πιθανότητας της X .

(β) Ποιο είναι το αναμενόμενο μήκος του συρμού, $E[X]$;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι δεν υπάρχει συρμός στη γραμμή Πειραιάς-Κηφισιά;

(δ) Το πλήθος των επιβατών που μπορούν να χωρέσουν στο συρμό είναι ίσο με $50X$ (δηλαδή, κάθε βαγόνι χωρά 50 επιβάτες). Έστω Y η τ.μ. που περιγράφει το πλήθος των επιβατών που *θέλουν* να ταξιδέψουν με το συρμό. Η τ.μ. Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 101 και 200, δηλαδή

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} & y = 101, 102, \dots, 199, 200 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος:

$A = \{\text{ο συρμός μπορεί να μεταφέρει όλους τους επιβάτες που επιθυμούν να ταξιδέψουν}\}.$

Άσκηση 2. Η μέση ημερήσια θερμοκρασία στη Θεσσαλονίκη τον μήνα του Μαρτίου, μετρούμενη σε ακέραιους βαθμούς Κελσίου, είναι μία τυχαία μεταβλητή X με την ακόλουθη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{20}|k - 10| & 10 - b \leq k \leq 10 + b \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά b και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π. της X .

Βοήθεια: Παρατηρήστε τη συμμετρία της σ.π. της X . Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\sum_{i=1}^b i = \frac{b(b+1)}{2}$.

(β) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή, $E[X]$, και η διασπορά, $var(X)$, της X ;

(γ) Το κόστος σε ευρώ της θέρμανσης ενός σπιτιού το μήνα Μάρτιο είναι $Y = 10(25 - X)^2$. Υπολογίστε το μέσο κόστος, $E[Y]$.

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(10 \leq X \leq 12 \mid 10 \leq X \leq 15)$.

(ε) Ορίστε τα εξής γεγονότα: $A = \{\text{Η μέση ημερήσια θερμοκρασία είναι } X \leq 10\}$ και $B = \{\text{Υπάρχουν τουλάχιστον 12 συνεφιασμένες μέρες μέσα στο Μάρτιο}\}$. Έστω ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $P(B) = 0.3$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A^c \cap B^c)$.

Άσκηση 3. Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$X = 2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$X = 3$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

(α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε την μέση τιμή της X , $E[X]$.

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε την μέση τιμή της Y , $E[Y]$.

(γ) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $\text{var}(Y/A)$, αντίστοιχα;

(δ) Έστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .

(ε) Έστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y . Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.

Άσκηση 4. Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω X ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα X φορές και έστω ότι εμφανίζονται Y κεφαλές.

(α) Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y|X}(y|x)$; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3|X = 6)$.

(γ) Ποια είναι η σ.π., $p_X(x)$, της τ.μ. X ;

(δ) Υπολογίστε την από κοινού σ.π., $p_{X,Y}(x, y)$, των τ.μ. X και Y .

(ε) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές, δηλαδή την $P(X = Y)$.

Άσκηση 5.

(α) Ένα εργαστήριο έχει N υπολογιστές συνδεδεμένους στο δίκτυο. Κάθε υπολογιστής δημιουργεί ένα πακέτο δεδομένων ανά μονάδα χρόνου με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Γράψτε ένα μικρό πρόγραμμα (π.χ. σε Matlab) για να προσομοιώσετε το συνολικό αριθμό των πακέτων που δημιουργούνται. Χρησιμοποιείτε τις τιμές $N = 20$ και $p = 0.2$, και ονομάστε X την σχετική τ.μ.

(β) Δημιουργείτε 100 δείγματα της τ.μ. X και εκτιμήστε την συνάρτηση πιθανότητας. Με άλλα λόγια, σχηματίστε το ιστόγραμμα των 100 δειγμάτων. Τι είδους τ.μ. είναι η X ; Δώστε τη γραφική παράσταση της εκτιμούμενης συνάρτησης πιθανότητας (του ιστογράμματος) καθώς και της θεωρητικής συνάρτησης πιθανότητας.

(γ) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της Διωνυμικής συνάρτησης πιθανότητας για :

$$(n, p) = (13, 1/2), (12, 1/2), (19, 1/3), \text{ και } (21, 1/3).$$

Τι παρατηρείτε ;

(δ) Τέλος, δώστε τη γραφική παράσταση της Διωνυμικής για $(n = 100, p = 0.1)$ καθώς και της Poisson με παράμετρο $\lambda = 10$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.