

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/10/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 5/11/2014

Θέματα: Στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυσης και Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Άσκηση 1.

Εφόσον τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι συγκεκριμένα, ο Βασίλης πρέπει να διαλέξει 4 επιπλέον φύλλα από τα 48 που απομένουν. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών φύλλων του Βασίλη στους οποίους περιλαμβάνονται τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι $\binom{4}{4} \binom{48}{4}$. Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο Βασίλης μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε 8 φύλλα από τα 52 της τράπουλας είναι $\binom{52}{8}$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{4}{4} \binom{48}{4}}{\binom{52}{8}} = 0.0259\%.$$

Άσκηση 2.

Αρχίζουμε υποθέτοντας ότι όλες οι $\binom{52}{5}$ δυνατές μοιρασιές είναι ισοπίθανες.

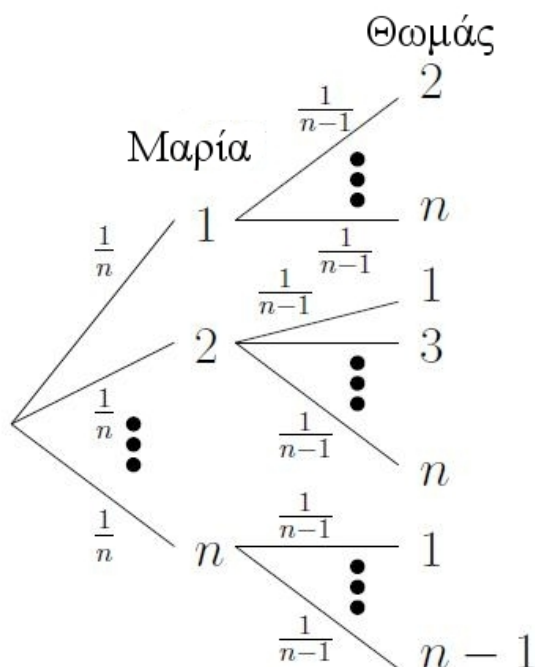
Για να υπολογίσουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που σχηματίζουν "κέντα" (π.χ. στο 5), υπολογίζουμε πρώτα το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων για τα οποία μια μοιρασιά αποτελείται από ένα άσο, ένα δύο, ένα τρία, ένα τέσσερα και ένα πέντε. Έστω καταρχάς ότι το χρώμα δεν μας ενδιαφέρει. Καθώς ο άσος μπορεί να είναι ένας από τους τέσσερις άσσους και ομοίως για τις υπόλοιπες 4 κάρτες, υπάρχουν 4^5 δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να μας δώσουν την παραπάνω μοιρασιά. Αλλά καθώς στα τέσσερα από αυτά τα αποτελέσματα όλες οι κάρτες είναι του ίδιου χρώματος (οπότε λέμε τότε ότι τα πέντε φύλλα σχηματίζουν "φλος"), προκύπτει τελικά ότι υπάρχουν $4^5 - 4$ μοιρασιές που σχηματίζουν "κέντα" στο πέντε, δηλαδή "κέντα" της μορφής: άσος, δύο, τρία, τέσσερα και πέντε. Παρόμοια υπάρχουν $4^5 - 4$ μοιρασιές που σχηματίζουν "κέντα" στον άσο: δέκα, βαλές, ντάμα, ρήγας και άσος. Συνολικά έχουμε 10 κέντες σε κάποιο συγκεκριμένο φύλλο: άσο, ρήγα, ντάμα, βαλέ, 10, ..., 5. Συνεπώς, υπάρχουν $10(4^5 - 4)$ μοιρασιές που σχηματίζουν "κέντα". Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039\%.$$

Άσκηση 3.

Για ευκολία θα αριθμήσουμε κάθε θέση στάθμευσης. Θα σχεδιάσουμε ένα δέντρο πιθανοτήτων για να περιγράψουμε το δειγματοχώρο (Σχήμα 1).

Η Μαρία μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε θέση από τις n θέσεις στάθμευσης. Η πιθανότητα να διαλέξει κάποια θέση είναι $1/n$. Ο Θωμάς μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε από τις $n - 1$ θέσεις που έχουν απομείνει με πιθανότητα $1/(n - 1)$.



Σχήμα 1: Δέντρο πιθανοτήτων

Υπάρχουν $n(n-1)$ φύλλα στο δέντρο μας, και κάθε φύλλο είναι ισοπίθανο. Όταν κοιτάμε τα φύλλα των κλαδιών όπου η Μαρία δεν διάλεξε τις θέσεις 1, 2, $n-1$ ή n παρατηρούμε ότι 4 φύλλα σε κάθε πλευρά αυτών των κλαδιών είναι στο δειγματοχώρο μας (2 θέσεις στάθμευσης σε κάθε πλευρά της θέσης της Μαρίας). Όταν η Μαρία επιλέγει τη θέση 2 ή $n-1$, υπάρχουν 3 τέτοια φύλλα (μία θέση από τη μία πλευρά και 2 από την άλλη). Όταν επιλέγει την 1 ή n υπάρχουν 2 τέτοια φύλλα (είναι στο τέλος του χώρου στάθμευσης - από τη μία ή την άλλη πλευρά).

Επομένως η πιθανότητα να έχουν σταθμεύσει σε απόσταση τουλάχιστον μιας θέσης μεταξύ τους είναι

$$\frac{(4)(n-4) + (3)(2) + (2)(2)}{n(n-1)} = \frac{4n-6}{n(n-1)}$$

Η παραπάνω πιθανότητα δεν είναι εφαρμόσιμη για $n=2$ και $n=3$. Το αποτέλεσμα για αυτές τις τιμές είναι 1.

Αν χρησιμοποιήσουμε καταμέτρηση υπάρχουν $n(n-1)$ επιλογές για ένα ζεύγος θέσεων, από τις οποίες υπάρχουν $2(n-1)$ επιλογές με καμία άδεια θέση μεταξύ τους και $2(n-2)$ επιλογές με 1 θέση μεταξύ τους.

Η πιθανότητα να έχουν σταθμεύσει σε απόσταση παραπάνω από μιας θέσης μεταξύ τους είναι

$$\frac{2(n-1) + 2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{4n-6}{n(n-1)}$$

Άσκηση 4.

(α') Τα κομμάτια έχουν ίση πιθανότητα να είναι καινούρια ή παλιά.

Έστω

$$A = \{\text{τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά}\}$$

$$B_1 = \{\text{επιλέγονται 2 παλιά κομμάτια}\}$$

$$B_2 = \{\text{επιλέγονται 2 νέα κομμάτια}\}$$

Υπάρχουν $\binom{1000}{2}$ τρόποι, με ίση πιθανότητα, επιλογής δύο παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 1000 παλιά κομμάτια. Εφόσον 15% των παλιών κομματιών είναι ελαττωματικά, υπάρχουν 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Υπάρχουν $\binom{150}{2}$ τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Επομένως, θα έχουμε

$$P(A | B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$$

Παρομοίως, ένα 5% από τα νέα κομμάτια (75) είναι ελαττωματικά. Δεδομένου ότι 2 νέα κομμάτια επιλέγονται, θα έχουμε:

$$P(A | B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα (σύμφωνα με το θεώρημα ολικής πιθανότητας) θα ισούται με

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}} \end{aligned}$$

(β') Προφανώς, ψάχνουμε για την πιθανότητα $P(B_1 | A)$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα του Bayes θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(B_1 | A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A | B_1)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

(α') Το καπέλο περιέχει τα ζεύγη $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ με ίδια πιθανότητα $1/6$. Επομένως,

$$P(\{\text{η μπάλα 3 βρίσκεται στο καπέλο}\}) = P(\{1, 3\} \cup \{2, 3\} \cup \{3, 4\}) = 3 \times 1/6 = 1/2$$

(β')

Ενδεχόμενα του Ω	Πιθανότητα	X	$p_X(x)$
$\{1, 2\}$	$1/6$	3	$1/6$
$\{1, 3\}$	$1/6$	4	$1/6$
$\{1, 4\}$	$1/6$	5	$2/6$
$\{2, 3\}$	$1/6$	5	
$\{2, 4\}$	$1/6$	6	$1/6$
$\{3, 4\}$	$1/6$	7	$1/6$

Συνεπώς,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 3, 4, 6, 7 \\ \frac{2}{6} & x = 5 \end{cases}$$

$$E[X] = (3 + 4 + 6 + 7) \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{2}{6} = 5$$

(γ') Μετά την κλοπή της μπάλας 3, το καπέλο θα περιέχει τα εξής: $\{1, 2\}, \{1\}, \{1, 4\}, \{2\}, \{2, 4\}, \{4\}$ με ίση πιθανότητα $1/6$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε

$$P(\{\text{η μπάλα που επιλέγεται έχει περιττό αριθμό (δηλαδή 1)}\}) = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 6.

(α') Ο δειγματοχώρος Ω του πειράματος αποτελείται από τα ισοπίθανα 9 το πλήθος, διατεταγμένα ζεύγη

$$\Omega = \{(i, j), i, j = 1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ω	$P(\omega)$	X	$P_X(x)$
(1,1)	1/6	2	1/9
(1,2)	1/6	3	2/9
(2,1)	1/6		
(1,3)	1/6		
(3,1)	1/6	4	3/9
(2,2)	1/6		
(2,3)	1/6	5	2/9
(3,2)	1/6		
(3,3)	1/6	6	1/9

$$P_X(k) = \begin{cases} 1/9, & k = 2 \\ 2/9, & k = 3 \\ 3/9, & k = 4 \\ 2/9, & k = 5 \\ 1/9, & k = 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{9}(2 + 6) + \frac{2}{9}(3 + 5) + \frac{3}{9}4 = 4$$

(β') Αφού πληρώνουμε α € για να κερδίσουμε $5X$, το παιχνίδι είναι δίκαιο όταν

$$E[5X - \alpha] = 0 \Rightarrow \alpha = E[5X] = 5E[X] = 20\text{€}.$$

Άσκηση 7.

(α') Επιτυχή αποστολή ενός μηνύματος από την πηγή στον προορισμό έχουμε, όταν λειτουργεί τουλάχιστον μία από τις δύο πρώτες παράλληλες συνδέσεις ΚΑΙ λειτουργεί η μεσαία σύνδεση ΚΑΙ λειτουργεί τουλάχιστον μία από τις τελευταίες παράλληλες συνδέσεις. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(\text{επιτυχούς αποστολής}) &= (1 - (1 - p)^2) \cdot p \cdot (1 - (1 - p)^2) \\ &= (2p - p^2)p(2p - p^2) = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{32} = 0.2813. \end{aligned}$$

(β') Εφόσον μπορεί να αποσταλεί ένα μήνυμα, τότε μπορούν να αποσταλούν 10 πακέτα (όλες οι συνδέσεις του δικτύου έχουν χωρητικότητα μεγαλύτερη ή ίση του 10). Περισσότερα από 10 πακέτα δεν είναι δυνατόν να αποσταλούν, δεδομένου ότι η χωρητικότητα της μεσαίας σύνδεσης είναι ίση με 10. Συνεπώς, η X μπορεί να πάρει δύο δυνατές τιμές: $X = 0$ και $X = 10$ με πιθανότητες οι οποίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος α'.

$$p_X(10) = P(\text{επιτυχούς αποστολής}) = \frac{9}{32} = 0.2813.$$

$$p_X(0) = P(\text{ανεπιτυχούς αποστολής}) = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} = 0.7187.$$

(γ') Ο ζητούμενος μέσος αριθμός των πακέτων που στέλνονται είναι

$$E[X] = 0 \cdot p_X(0) + 10 \cdot p_X(10) = \frac{90}{32} = \frac{45}{16} = 2.8125.$$