

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/10/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 5/11/2014

Θέματα: Στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυσης και Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Άσκηση 1. Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιχνίδι: Πρώτα, η Αλίκη τραβάει τυχαία 4 φύλλα από μία τράπουλα με 52 φύλλα, τα κοιτάει, σημειώνει στα κρυφά ποια είναι αυτά, και τα επιστρέφει πίσω στην τράπουλα. Στη συνέχεια ο Βασίλης τραβάει τυχαία 8 φύλλα από την τράπουλα. Η Αλίκη κερδίζει αν στα φύλλα που τράβηξε ο Βασίλης περιέχονται τα 4 δικά της. Με ποια πιθανότητα κερδίζει η Αλίκη;

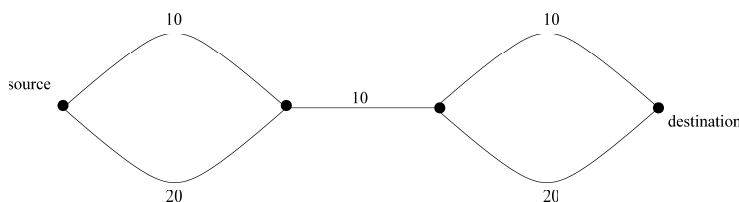
Άσκηση 2. Στο πόκερ μοιράζονται 5 φύλλα σε κάθε παίκτη από μία τράπουλα με 52 φύλλα. Αν τα φύλλα κάποιου έχουν διαφορετικές *διαδοχικές* τιμές χωρίς όλα να είναι του ίδιου *χρώματος* (υπάρχουν 4 χρώματα: μπαστούνια, κούπες, καρό, σπαθιά), λέμε ότι έχει κάνει *κέντα*. Για παράδειγμα, μία μοιρασιά που αποτελείται από: 5 κούπα, 6 κούπα, 7 σπαθί, 8 μπαστούνι, και 9 καρό είναι *κέντα*. Μάλιστα τη λέμε *κέντα στο 9*. Ποια είναι η πιθανότητα να κάνει κάποιος *κέντα*;

Άσκηση 3. Ένας χώρος στάθμευσης αποτελείται από μία σειρά n θέσεων ($n \geq 2$). Η Μαρία φτάνει στο χώρο στάθμευσης όταν όλες οι θέσεις είναι ελεύθερες. Ο Θωμάς είναι ο επόμενος που έρχεται να σταθμεύσει. Καθένας τους επιλέγει ισοπίθανα από τις θέσεις στάθμευσης που είναι διαθέσιμες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι θέσεις στάθμευσης που επιλέγονται από την Μαρία και τον Θωμά έχουν το πολύ 1 κενή θέση μεταξύ τους.

Άσκηση 4. Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά! Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

(α) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διάλεγετε δύο κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μίας και μοναδικής ρίψης του κέρματος. Ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

(β) Δεδομένων των συνθηκών στο (α), και του ότι και τα δύο αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο είναι παλιά;



Σχήμα 1: Περιγραφή δικτύου της Άσκησης 7.

Άσκηση 5. Ένα δοχείο περιέχει τέσσερις μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 4. Δύο μπάλες επιλέγονται τυχαία (χωρίς επανάθεση) από το δοχείο και τοποθετούνται σε ένα καπέλο.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η μπάλα 3 βρίσκεται στο καπέλο.

(β) Ορίζουμε την τ.μ. X ως το άθροισμα των αριθμών των δύο μπαλών που βρίσκονται στο καπέλο. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας και μέση τιμή της τ.μ. X .

(γ) Όταν δεν κοιτάτε, ένας κλέφτης αφαιρεί την μπάλα 3 (ανεξάρτητα από το αν αυτή βρίσκεται στο δοχείο ή στο καπέλο). Στη συνέχεια επιλέγετε τυχαία μία μπάλα από το καπέλο. Υπολογίστε την πιθανότητα ο αριθμός της να είναι περιττός.

Άσκηση 6. Ρίχνουμε δύο δίκαια τριεδρα ζάρια. Ορίζουμε τη τ.μ. X ως το άθροισμα των δύο ρίψεων.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(x)$ και τη μέση τιμή, $E[X]$, της τ.μ. X .

(β) Σε ένα παιχνίδι τύχης, πληρώνετε a ευρώ για το δικαίωμα να ρίξετε μία φορά τα ζάρια κερδίζοντας $5X$ ευρώ. Ποια τιμή για το a καθιστά αυτό το παιχνίδι δίκαιο, δηλαδή ένα παιχνίδι στο οποίο κατά μέσο όρο παίρνετε πίσω ότι πληρώσατε;

Άσκηση 7. Θεωρείστε το δίκτυο στο Σχήμα 1, όπου οι αριθμοί στις ακμές μεταξύ πηγής (source) και προορισμού (destination) δηλώνουν τη χωρητικότητα της αντίστοιχης σύνδεσης (μετρούμενη σε πακέτα). Κάθε σύνδεση χαλάει με πιθανότητα $p = 1/2$ ανεξάρτητα από τις άλλες.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα μήνυμα μπορεί να αποσταλεί επιτυχώς από την πηγή στον προορισμό.

(β) Ορίστε την τ.μ. X ως το πλήθος των πακέτων που μπορούν να σταλούν από την πηγή στον προορισμό. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της X .

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X .