

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/10/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/10/2014

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1.

Ορίζουμε τα γεγονότα

$$\begin{aligned}M &= \{ \text{Η λέσχη επιλέγει τυχαία ένα μυθιστόρημα} \} \\B &= \{ \text{Η λέσχη επιλέγει τυχαία μία βιβλιογραφία} \} \\A &= \{ \text{Η Άννα συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης} \}\end{aligned}$$

Από τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε ότι

$P(M) = 5P(B)$ και αφού ο δειγματοχώρος μας διαμερίζεται στα γεγονότα M και B :

$$P(\Omega) = P(M) + P(B) = 5P(B) + P(B) = 6P(B) = 1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6} \text{ και } P(M) = \frac{5}{6}$$

Ακόμα,

$$P(A/M) = \frac{1}{5} \text{ και } P(A/B) = \frac{3}{5}$$

(α) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας η πιθανότητα η Άννα να συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης είναι

$$P(A) = P(M)P(A/M) + P(B)P(A/B) = \frac{5}{6} \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$$

(β) Από το νόμο του Bayes η πιθανότητα ότι το βιβλίο που επιλέχθηκε είναι βιογραφία (αίτιο) με δεδομένο ότι η Άννα συμμετείχε στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης (αποτέλεσμα/παρατήρηση) είναι

$$P(B/A) = \frac{P(B)P(A/B)}{P(B)P(A/B) + P(M)P(A/M)} = \frac{\frac{1}{6} \frac{3}{5}}{\frac{1}{6} \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{8}{30}} = \frac{3}{8}$$

Άσκηση 2.

(α) Για $i = 1, 2, 3$ ορίζουμε τα γεγονότα

$$\begin{aligned}K_i &= \{ \text{Η } i\text{-ή ρίψη είναι κεφαλή} \} \\ \Gamma_i &= \{ \text{Η } i\text{-ή ρίψη είναι γράμματα} \}\end{aligned}$$

Ακόμα, ορίζουμε το γεγονός

$$\Delta = \{ \text{Η κότα δε διασχίζει το δρόμο} \}$$

Τότε,

$$P(\Delta) = P((K_1 K_2 K_3)^c) = 1 - P(K_1 K_2 K_3) \stackrel{(2.1)}{=} 1 - P(K_1)P(K_2)P(K_3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Όπου (2.1) ισχύει διότι οι 3 ρίψεις του νομίσματος είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

$$\textbf{(β)} \quad P(\Gamma_1 | \Delta) = \frac{P(\Gamma_1 \Delta)}{P(\Delta)} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{P(\Gamma_1)}{P(\Delta)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Όπου (2.2) ισχύει διότι $\Gamma_1 \subset \Delta$.

$$\textbf{(γ)} \quad P(K_1 | \Delta) = 1 - P(K_1^c | \Delta) \stackrel{(2.3)}{=} 1 - P(\Gamma_1 | \Delta) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Όπου (2.3) ισχύει διότι $K_1^c = \Gamma_1$.

Άσκηση 3.

(α) Όλα τα ζάρια έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεχθούν και για ένα δεδομένο ζάρι οι πλευρές του είναι ισοπίθανες. Έτσι ορίζουμε το γεγονός

$B_1 = \{ \text{Στην 1η ρίψη έρχεται μία από τις 6 μπλε πλευρές εκ των συνολικά 18 πλευρών που έχουν τα 3 ζάρια} \}$, με $P(B_1) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Ένας άλλος τρόπος να λυθεί το πρόβλημα είναι η χρήση δεσμευμένης πιθανότητας ως εξής:

Έστω, το γεγονός

$$D_i = \{ \text{Επιλέγεται το ζάρι με } i \text{ μπλε πλευρές} \}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\Omega = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

και από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$B_1 = (D_1 \cap B_1) \cup (D_2 \cap B_1) \cup (D_3 \cap B_1)$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(D_1 B_1) \cup P(D_2 B_1) \cup P(D_3 B_1) \\ &= P(B_1|D_1)P(D_1) \cup P(B_1|D_2)P(D_2) \cup P(B_1|D_3)P(D_3) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} P(B_1|D_1)P(D_1) + P(B_1|D_2)P(D_2) + P(B_1|D_3)P(D_3) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Όπου (3.1) διότι τα τρία γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους, αφού τα D_1, D_2, D_3 αποτελούν μία διαμέριση του δειγματοχώρου.

(β) Έστω το γεγονός

$$B_2 = \{ \text{Έρχεται μπλε στη 2η ρίψη} \}$$

Τότε,

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2 B_1)}{P(B_1)}$$

Για να υπολογίσετε το $P(B_2 B_1)$ ακολουθήστε την ίδια προσέγγιση ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα, με αυτήν που ακολουθήθηκε στο ερώτημα (α) αντικαθιστώντας το γεγονός B_1 με την τομή $B_2 B_1$:

$$\begin{aligned} P(B_2 B_1) &= P(D_1 B_2 B_1) + P(D_2 B_2 B_1) + P(D_3 B_2 B_1) \\ &= P(B_2 B_1|D_1)P(D_1) + P(B_2 B_1|D_2)P(D_2) + P(B_2 B_1|D_3)P(D_3) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \frac{2}{6} \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \frac{3}{6} \frac{1}{3} \\ &= \frac{14}{108} = \frac{7}{54} \end{aligned}$$

Διότι αφότου επιλεχθεί ένα ζάρι, τα αποτελέσματα των ρίψεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

$$\text{Έτσι, } P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2 B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{7}{54}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{18}.$$

Άσκηση 4.

(α) Καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Επίσης, αφού το B είναι υποσύνολο του A , $P(A \cap B) = P(B)$. Επομένως, $P(B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) - P(A)P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B)(1 - P(A)) = 0$ και συνεπώς $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.

(β) Ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{ \text{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} \}$$

Το γεγονός A είναι:

$$A = \{ \text{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} \}$$

με $P(A) = \frac{4}{8}$, ενώ το B είναι:

$$B = \{ \text{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ} \}$$

με $P(B) = \frac{6}{8}$. Η τομή των A και B είναι το γεγονός "ακριβώς μία κεφαλή":

$$A \cap B = \{ \text{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ} \}$$

με $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Καθώς, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα.

Εδώ για να βρείτε πιο εύκολα την τομή των A και B θα μπορούσατε να παρατηρήσετε ότι

$A = \{ \text{'Ερχονται τουλάχιστον δύο γράμματα'} \} = \{ \text{'Ερχεται το πολύ μία κεφαλή'} \}$
και αφού

$$B = \{ \text{'Ερχονται μία ή δύο κεφαλές'} \}$$

μπορείτε εύκολα να αναγνωρίσετε πλέον ότι

$$A \cap B = \{ \text{'Ερχεται ακριβώς μία κεφαλή'} \}$$

(γ) Και πάλι

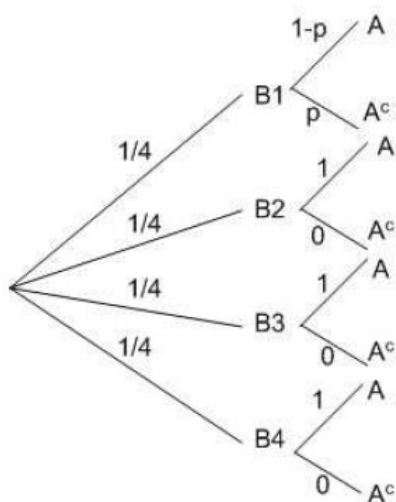
$$\begin{aligned} A &= \{ \text{'Ερχονται τουλάχιστον δύο γράμματα'} \} = \{ \text{'Ερχονται το πολύ δύο κεφαλές'} \} \\ &= \{ \text{ΚΚΓΓ, ΓΚΚΓ, ΓΓΚΚ, ΚΓΓΚ, ΓΓΓΓ, ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \} \end{aligned}$$

$$B = \{ \text{'Ερχονται μία ή δύο κεφαλές'} \} = \{ \text{ΚΚΓΓ, ΓΚΚΓ, ΓΓΚΚ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \}$$

Σε αυτήν την περίπτωση μπορείτε να παρατηρήσετε ότι $B \subset A$, αφού περιέχει όλα τα στοιχεία που υπάρχουν και στο A , εκτός του ΓΓΓΓ. Αν τα A και B ήταν ανεξάρτητα τότε από (α) θα έπρεπε να ισχύει: $P(A) = 1$ ή $P(B) = 0$. Αλλά προφανώς $P(B) > 0$, αφού π.χ. περιέχει το ενδεχόμενο ΚΚΓΓ και $P(A) < 1$, αφού π.χ. δεν περιέχει το ενδεχόμενο ΚΚΚΚ. Άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 5.

Έστω A το ενδεχόμενο ότι ο φίλος σας ψάχνει στη δισκέτα 1 και δε βρίσκει τίποτα, και έστω B_i το ενδεχόμενο ότι η εργασία σας είναι στη δισκέτα i . Άρα, ο δειγματικός χώρος είναι ο εξής



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση Άσκησης 5

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα B_1 , B_2 , B_3 και B_4 αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου. Όποτε, εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes για να βρούμε την πιθανότητα ότι η εργασία βρίσκεται στη δισκέτα i δεδομένου ότι ο φίλος ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να την ανακτήσει:

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}P(A|B_i)}{\frac{1}{4} \cdot (1-p) + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{P(A|B_i)}{4-p} \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(B_i|A) = \begin{cases} (1-p)/(4-p) & , \text{για } i = 1 \\ 1/(4-p) & , \text{για } i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

Άσκηση 6.

(α) Για να βρούμε τις πιθανότητες των B_i χρησιμοποιούμε το νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= (1-\epsilon)\frac{1}{2} + 0\frac{1}{4} + \epsilon\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) \\ &= \epsilon\frac{1}{2} + (1-\epsilon)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|A_0)P(A_0) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\ &= 0\frac{1}{2} + \epsilon\frac{1}{4} + (1-\epsilon)\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το άθροισμα των B_i είναι 1.

(β) Οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι

$$\begin{aligned} P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0, B_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1, A_0)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\epsilon\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1, B_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1, A_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{(1-\epsilon)\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= \frac{1-\epsilon}{1 + \epsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_2|B_1) &= \frac{P(A_2, B_1)}{P(B_1)} \\&= \frac{P(B_1, A_2)}{P(B_1)} \\&= \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} \\&= \frac{0\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\&= 0\end{aligned}$$

Ξανά παρατηρούμε ότι το άθροισμα των παραπάνω πιθανοτήτων είναι 1 (όπως ήταν αναμενόμενο).