

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/10/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/10/2014

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1. Η Άννα ανήκει σε μία λέσχη αναγνωστών που συναντιούνται μία φορά το μήνα για να συζητήσουν για κάποιο βιβλίο που μπορεί να είναι μυθιστόρημα ή βιογραφία. Η λέσχη επιλέγει τυχαία ένα βιβλίο, με τα μυθιστορήματα να έχουν 5 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής απ' ότι οι βιογραφίες. Η Άννα συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης με πιθανότητα $1/5$ αν το επιλεγμένο βιβλίο είναι μυθιστόρημα και με πιθανότητα $3/5$, αν το βιβλίο είναι βιογραφία.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Άννα συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης;
- (β) Με δεδομένο ότι η Άννα συμμετείχε στην μηνιαία συνάντηση, ποια είναι η πιθανότητα ότι το βιβλίο που επιλέχθηκε είναι βιογραφία;

Άσκηση 2. Μία κότα θέλει να διασχίσει το δρόμο αλλά φοβάται ότι θα την πατήσουν τα αυτοκίνητα. Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Αν φέρει γράμματα, δεν διασχίζει το δρόμο. Αν φέρει κεφαλή, επειδή είναι πολύ φοβισμένη, αποφασίζει να ρίξει το κέρμα άλλες 2 φορές. Αν οι επόμενες 2 ρίψεις φέρουν και οι δύο κεφαλή, τότε θα διασχίσει το δρόμο. Αν όχι, θα μείνει ακίνητη στην άκρη του δρόμου.

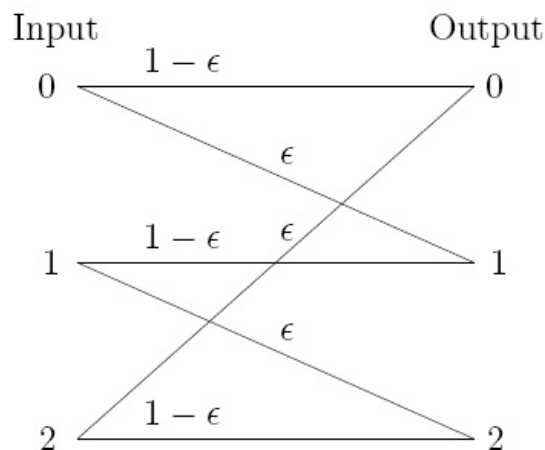
- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η κότα δεν θα διασχίσει το δρόμο.
- (β) Με δεδομένο ότι η κότα δεν διασχίζει το δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε γράμματα.
- (γ) Με δεδομένο ότι η κότα δεν διασχίζει το δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε κεφαλή.

Άσκηση 3. Καθαρίζοντας το συρτάρι του ο Κώστας βρίσκει τρία δίκαια εξάεδρα ζάρια. Βάφει με μπλε χρώμα μία έδρα από το πρώτο, δύο έδρες από το δεύτερο και τρεις έδρες από το τρίτο ζάρι. Επιλέγει τυχαία, ένα από τα τρία ζάρια και αρχίζει να το ρίχνει.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα η πρώτη ρίψη να φέρει μπλε.
- (β) Με δεδομένο ότι η πρώτη ρίψη έφερε μπλε, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι και η δεύτερη ρίψη φέρνει μπλε;

Άσκηση 4. Το πρόβλημα αυτό εξετάζει την κατανόησή σας για την έννοια της ανεξαρτησίας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μέρος (α) για να απαντήσετε το (γ).

- (α) Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $B \subset A$, τότε $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.
- (β) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα n φορές. Έστω $n = 3$. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{έρχονται τουλάχιστον 2 γράμματα}\}$ και $B = \{\text{έρχονται μία ή δύο κεφαλές}\}$. Είναι τα A και B ανεξάρτητα;
- (γ) Επαναλάβετε το μέρος (β) για $n = 4$.



Σχήμα 1: Τριαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Άσκηση 6.

Άσκηση 5. Υποθέστε ότι ήσασταν αρκετά απερίσκεπτοι ώστε να σώσετε την εργασία σας στο HY-150 μόνο σε μία δισκέτα, η οποία δυστυχώς κράσαρε. Ακόμα χειρότερα, την είχατε φυλάξει σε ένα συρτάρι με άλλες τρεις επίσης χαλασμένες δισκέτες. Πριν πάρετε τις 4 δισκέτες σε έναν ειδικό για να ανακτήσετε την εργασία σας, ένας φίλος σας προσφέρεται να ρίξει μία ματιά και να σας γλυτώσει από τα έξοδα. Επιλέγετε λοιπόν τυχαία μία δισκέτα και την παραδίδετε στον φίλο σας. Αν η εργασία σας βρίσκεται στη δισκέτα που δίνετε στο φίλο σας, αυτός θα την ανακτήσει με πιθανότητα p . Δεδομένου ότι ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να ανακτήσει την εργασία σας, ποια είναι η πιθανότητα ότι η εργασία σας βρίσκεται στην δισκέτα i , $i = 1, 2, 3, 4$;

Βοήθεια: Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος και χρησιμοποιείτε το νόμο του Bayes.

Άσκηση 6. Το διάγραμμα μετάβασης πιθανοτήτων ενός τριαδικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού δίνεται στο Σχήμα 1. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα να ληφθεί 0 (ή 1, ή 2) ενώ έχει σταλεί 0 (ή 1, ή 2, αντίστοιχα) είναι $1 - \epsilon$. Δηλαδή, $P(0 \text{ received}/0 \text{ sent}) = P(1 \text{ received}/1 \text{ sent}) = P(2 \text{ received}/2 \text{ sent}) = 1 - \epsilon$. Ανάλογα, $P(0 \text{ received}/2 \text{ sent}) = P(1 \text{ received}/0 \text{ sent}) = P(2 \text{ received}/1 \text{ sent}) = \epsilon$. Υποθέστε ότι τα τρία σύμβολα 0, 1, 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2, 1/4, 1/4$, αντίστοιχα.

Ορίστε τα γεγονότα $A_i = \{\text{η είσοδος του καναλιού είναι } i \text{ (δηλαδή εστάλη } i)\}$ και $B_i = \{\text{η έξοδος του καναλιού είναι } i \text{ (δηλαδή ελήφθη } i)\}$, $i = 0, 1, 2$.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των B_i , $P(B_i)$, $i = 0, 1, 2$.

(β) Δεδομένου ότι ελήφθη 1 (δηλαδή συνέβη το γεγονός B_1), υπολογίστε τις πιθανότητες ότι εστάλη 0, ή 1, ή 2.