

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/09/2014

Ημερομηνία Παράδοσης: 06/10/2014

Άσκηση 1.

(α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος περιγράφεται ως:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

όπου ο πρώτος αριθμός κάθε διατεταγμένου ζεύγους στο Ω αντικατοπτρίζει το αποτέλεσμα της πρώτης επιλογής από το καπέλο, ενώ ο δεύτερος το αποτέλεσμα της δεύτερης επιλογής, μετά από την επανατοποθέτηση της κάρτας.

(β) $E = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ είναι το ζητούμενο γεγονός του να επιλεγούν δύο κάρτες με αριθμούς των οποίων το άθροισμα να είναι ίσο με 4.

(γ) $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 2.

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$\begin{aligned} H\rho &= \{\text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Ηρακλής}\} \\ A\rho &= \{\text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Άρης}\} \\ A\pi &= \{\text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Απόλλων}\} \\ A\tau &= \{\text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Ατρόμητος}\} \end{aligned}$$

Μας δίδεται ότι

$$P(H\rho) = 2 P(A\pi) \quad (2.1)$$

$$P(A\rho) = 4 P(A\tau) \quad (2.2)$$

$$P(H\rho) = 5 P(A\tau) \quad (2.3)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$P(H\rho) + P(A\rho) + P(A\pi) + P(A\tau) = 1 \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.1) , (2.2) , (2.3) στην (2.4) έχουμε

$$5P(A\tau) + 4P(A\tau) + 0.5P(H\rho) + P(A\tau) = 1$$

$$5P(A\tau) + 4P(A\tau) + 2.5P(A\tau) + P(A\tau) = 1$$

$$12.5P(A\tau) = 1$$

$$P(A\tau) = \frac{1}{12.5} = \frac{2}{25} = 0.08$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στις (2.1) , (2.2) , (2.3) έχουμε:

$$P(H\rho) = 0.4$$

$$P(A\rho) = 0.32$$

$$P(A\pi) = 0.2$$

Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα του γεγονότος ότι ο Ηρακλής ή ο Απόλλων κερδίζουν το τουρνουά θα είναι

$$P(H\mu \cup A\mu) = P(H\mu) + P(A\mu) = 0.4 + 0.2 = 0.6 \quad (H\mu \text{ και } A\mu: \text{ Ασυμβίβαστα/Ξένα γεγονότα})$$

Άσκηση 3.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε απλό ενδεχόμενο χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) όπου a και b είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα της 1ης και της 2ης ρίψης αντίστοιχα. Έτσι ο δειγματικός χώρος του πειράματος εκφράζεται ως

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3) \dots (2, 1), (2, 2) \dots (6, 6)\}$$

ή πιο απλά και αναλυτικά

$$\Omega = \{(a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\}$$

(α) Αντίστοιχα το γεγονός $A = \{ \text{Η 1η ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3} \}$ περιγράφεται ως

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

ή

$$A = \{(a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 6\}$$

Αφού τα ζάρια είναι δίκαια, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα άρα

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

(β) Το γεγονός $B = \{ \text{Το άθροισμα των 2 ρίψεων είναι ίσο με 4} \}$ περιγράφεται ως

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Άσκηση 4.

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$F = \{ \text{Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής έχει Facebook} \}$$

$$T = \{ \text{Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής έχει Twitter} \}$$

$$I = \{ \text{Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής έχει iPhone} \}$$

Η τάξη έχει συνολικά 40 φοιτητές. Τα δεδομένα μπορούν να εκφραστούν σε πληθάριθμους συνόλων ως εξής:

(1) 12 δεν είναι στο Facebook

$$\Rightarrow |F| = 40 - 12 = 28 \text{ είναι στο Facebook}$$

(2) 15 είναι στο Facebook και στο Twitter

$$\Rightarrow |F \cap T| = 15$$

(3) Τα $\frac{5}{9}$ αυτών που δεν είναι στο Twitter έχουν iPhone

Δηλαδή αυτοί που δεν είναι στο Twitter και έχουν iPhone, είναι τα $\frac{5}{9}$ αυτών που δεν είναι στο Twitter

$$\Rightarrow \frac{|T^c \cap I|}{|T^c|} = \frac{5}{9}$$

(4) 8 είναι στο Facebook και στο Twitter και έχουν iPhone

$$\Rightarrow |F \cap T \cap I| = 8$$

(5) 7 δεν είναι στο Twitter και δεν έχουν iPhone, αλλά είναι στο Facebook

$$\Rightarrow |T^c \cap I^c \cap F| = 7$$

(6) Τα $\frac{2}{3}$ αυτών που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone, είναι στο Twitter

Δηλαδή αυτοί που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone και είναι στο Twitter, είναι τα $\frac{2}{3}$

$$\text{αυτών που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone} \Rightarrow \frac{|F^c \cap I^c \cap T|}{|F^c \cap I^c|} = \frac{2}{3}$$

Για τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο πίνακα Karnaugh που περιέχει όλες τις πιθανές τομές γεγονότων ανά τρεις. Συμβολίζουμε με F , T και I το εκάστοτε γεγονός. Θα τον γεμίσουμε χρησιμοποιώντας τα δεδομένα/πληθάρθιμους της άσκησης. Στις θέσεις του πίνακα για τις οποίες δεν έχουμε πληροφορία από τα δεδομένα θα τοποθετήσουμε μεταβλητές.

	F	F	F^c	F^c
I	8	6	$12 - x - y - z$	x
I^c	7	7	y	z
	T	T^c	T	T^c

Έχουμε ότι (χρησιμοποιείστε και ένα διάγραμμα Venn για να το δείτε)

(4) $|F \cap T \cap I| = 8$

(2) $|F \cap T| = 15 \Leftrightarrow |F \cap T \cap I^c| = 15 - 8 = 7$

(5) $|T^c \cap I^c \cap F| = 7$

(1) $|F| = 28 \Leftrightarrow |T^c \cap I \cap F| = 28 - 8 - 7 - 7 = 6.$

Για τις υπόλοιπες τομές γεγονότων δεν έχουμε στοιχεία από τα δεδομένα οπότε θα τοποθετήσουμε τις μεταβλητές x , y , z στα υπόλοιπα κελιά και στο 4ο άγνωστο κελί θα χρησιμοποιήσουμε το δεδομένο ότι $|F^c| = 12$, άρα θα τοποθετήσουμε εκεί την τιμή $12 - x - y - z$ (για να εξαλείψουμε τον 4ο άγνωστο).

Ακόμα έχουμε ότι

(3) $\frac{|T^c \cap I|}{|T^c|} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{6+x}{6+7+x+z} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 4x - 5z = 11 \quad (4.1)$

(6) $\frac{|F^c \cap I^c \cap T|}{|F^c \cap I^c|} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{y}{y+z} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = 2z \quad (4.2)$

Από την (4.1) προκύπτει ότι

$$(x, z) \in \{(4, 1), (9, 5)\}$$

Όμως η λύση $(9, 5)$ απορρίπτεται γιατί μας δίδεται από **(1)** ότι $|F^c| = 12$. Άρα τελικά $x = 4, z = 1$ και $y = 2$ (από (4.2)).

Ο πίνακας Karnaugh διαμορφώνεται ως εξής

	F	F	F^c	F^c
I	8	6	5	4
I^c	7	7	2	1
	T	T^c	T	T^c

(α) Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $F^c \cap T^c \cap I^c$. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $|F^c \cap T^c \cap I^c| = 1$, άρα $P(F^c \cap T^c \cap I^c) = \frac{1}{40}$.

(β) Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $F^c \cap T \cap I$. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $|F^c \cap T \cap I| = 5$, άρα $P(F^c \cap T \cap I) = \frac{5}{40}$.

Άσκηση 5.

Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cup B$. Μία από τις ιδιότητες των Πιθανοτήτων είναι η ακόλουθη:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δοθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A \cup B$ (μέρος (δ) της εκφώνησης).

Άσκηση 6.

Πρώτα, προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των έξι απλών ενδεχομένων. Έστω

$$a = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$$

$$b = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$$

Μας δίδεται ότι

$$b = 3a$$

Σύμφωνα με τα Αξιώματα της Προσθετικότητας (additivity) και της Κανονικοποίησης (normalization), θα έχουμε ότι

$$1 = 3a + 3b = 3a + 9a = 12a$$

Επομένως, θα είναι

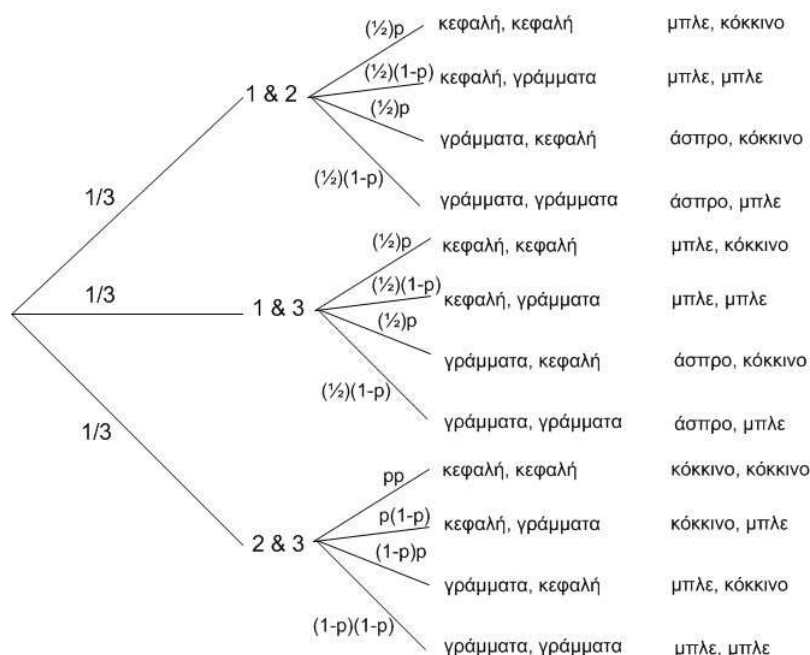
$$a = \frac{1}{12}, \quad b = \frac{3}{12}$$

και η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με

$$P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Άσκηση 7.

(α) Το πείραμα θεωρούμε ότι γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται η επιλογή των δύο κερμάτων, ενώ στη δεύτερη φάση γίνεται το ρίξιμο αυτών. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή δύο κερμάτων από ένα σύνολο τριών: επιλέγουμε το πρώτο και το δεύτερο ή το πρώτο και το τρίτο ή το δεύτερο και το τρίτο. Καθένα από αυτά τα ζευγάρια έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής. Επίσης, για κάθε ζευγάρι κερμάτων υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα ρίψεων: (κεφαλή, κεφαλή), (κεφαλή, γράμματα), (γράμματα, κεφαλή), (γράμματα, γράμματα). Τώρα, ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος 7(α)

(β) Η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά τη ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι:

$$\begin{aligned}
 P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) &= P((\text{μπλε}, \text{μπλε})) + P((\text{κόκκινο}, \text{κόκκινο})) \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) + (1-p)^2 + p^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{3}(2p^2 - 3p + 2)
 \end{aligned}$$

Όμως, $P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) = \frac{29}{96}$. Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $(\frac{1}{3})(2p^2 - 3p + 2) = \frac{29}{96}$, βρίσκουμε ότι $p = \frac{5}{8}$ ή $p = \frac{7}{8}$.