ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ

Θέμα 1: Μια φυλή Βεδουίνων ψάχνουν να βρουν νερό στην έρημο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν το σοφό της φυλής, ο οποίος με την εμπειρία του και το μαγικό ραβδί του μπορεί να εντοπίζει το νερό με πιθανότητα 0,93, δηλαδή αν υπάρχει νερό σε ένα σημείο θα το βρει με πιθανότητα 93%. Επίσης, ο σοφός κάνει λάθος και λέει ότι βρήκε νερό όταν δεν υπάρχει νερό στο 12% των περιπτώσεων. Έστω η εκ των πρότερων (a priori) πιθανότητα ύπαρξης νερού σε οποιοδήποτε σημείο στην έρημο είναι 0.05.
α) Αν κάποια στιγμή ο σοφός φωνάξει «βρήκα νερό», ποια η πιθανότητα πραγματικά να υπάρχει νερό·
β) Αν φωνάξει «δεν υπάρχει νερό εδώ», ποια η πιθανότητα πραγματικά να μην υπάρχει νερό·

Λύση:
Έστω A το ενδεχόμενο υπάρχει νερό και N το ενδεχόμενο ¨εγώ ο σοφός βρήκα νερό¨. Ισχύουν:

$$
\begin{aligned}
P(N/A) &= 0.93, P(N/A^c) = 0.12, P(A) = 0.05 \\
P(A/N) &= \frac{P(A)P(N/A)}{P(N)} = \frac{0.05\ 0.93}{P(N)}, \text{όπου} \\
P(N) &= P(A)P(N/A) + P(A^c)P(N/A^c) = 0.05\ 0.93 + 0.95\ 0.12 = 0.1605 \\
P(A^c/N^c) &= \frac{P(A^c)P(N^c/A^c)}{P(N^c)} = \\
&= \frac{(1-P(A))(1-P(N/A^c))}{1-P(N^c)} = \frac{(1-0.05)(1-0.12)}{1-0.1605} = 0.996
\end{aligned}
$$

Θέμα 2: Έστω ότι ένα κατάστημα ενοικίασης ποδηλάτων διαθέτει K ποδήλατα. Το κατάστημα έχει εγγεγραμμένους 250 πελάτες, και έστω ότι τις ώρες αιχμής κάθε πελάτης θέλει να νοικιάσει ποδήλατο με πιθανότητα 0,4. ποια πρέπει αν είναι η τιμή του K ώστε η πιθανότητα να ζητάει κάποιος πελάτης ποδήλατο και να μην υπάρχει να είναι μικρότερη του 0,1.

Λύση:
Η πιθανότητα m από τους $n = 250$ να ζητήσουν ποδήλατο ειναι:

$$
\begin{aligned}
p(m) &= \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m} \\
&= \frac{250!}{(250-m)!m!} 0.4^m (1-0.4)^{250-m}
\end{aligned}
$$

Η πιθανοτητα να ζητήσουν και να πάρουν ποδήλατο ειναι:

$$P_K = \sum_{m=1}^{K} p(m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{K} \frac{250!}{(250-m)!m!} 0.4^m (1-0.4)^{250-m}$$

Η πιθανότητα να ζητήσουν και να μή παρουν ποδήλατο (για τουλάχιστον $K+1$ πελάτες υπάρχουν Κ ποδήλατα) είναι:

$$P_K = \sum_{m=K+1}^{n} p(m)$$

Θέτουμε $P_K < 0.1$ και βρίσκουμε το Κ λύνοντας την ανίσωση

Θέμα 3: Ένα παιχνίδι περιλαμβάνει τα παρακάτω 2 βήματα: Βήμα Μ. Ο παίχτης τραβάει μια μπάλα από ένα κουτί. Το κουτί έχει 10 μπάλες διαφόρων χρωμάτων, 2 από τις οποίες είναι μαύρες και 2 άσπρες. Αν τραβήξει μαύρη κερδίζει 100 ευρώ και συνεχίζει, αν τραβήξει άσπρη σταματά σε αυτό το σημείο, σε κάθε άλλη περίπτωση απλώς συνεχίζει. Βήμα Σ. Ο παίχτης κάνει σκοποβολή. Αν πετύχει κέντρο κερδίζει 300 ευρώ και συνεχίζει, αν πετύχει περιφέρεια κερδίζει 100 ευρώ και συνεχίζει, διαφορετικά σταματά σε αυτό το σημείο. Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να παίξει τα βήματα Μ,Σ ένας παίχτης για να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος του, αν είναι δεινός σκοπευτής, δηλαδή πετυχαίνει κέντρο ή περιφέρεια με πιθανότητες 0,4 και 0,3 αντίστοιχα. Πόσο σίγουρος είναι για τις επιλογές του και στις 2 περιπτώσεις·

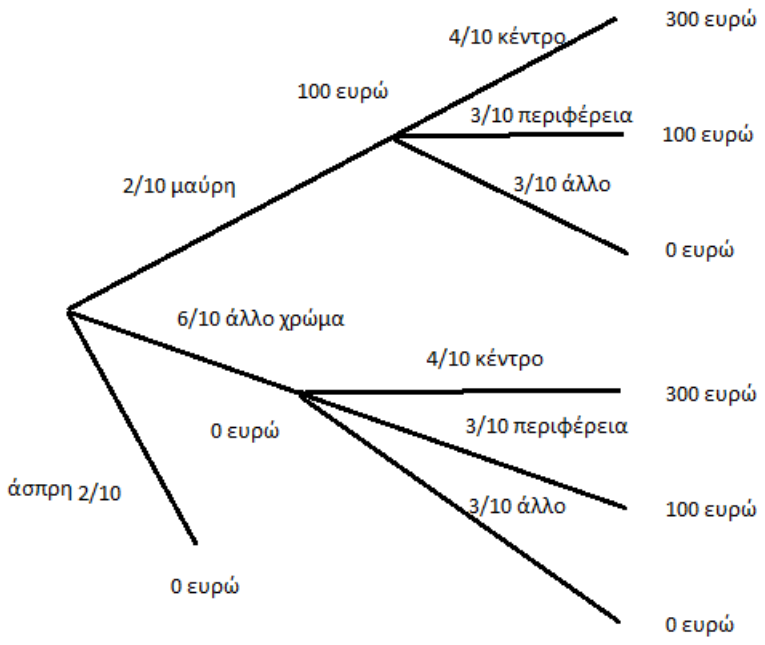
Λύση:
Στην πρώτη περίπτωση πρώτα εκτελείται το βήμα Μ και μετά το Σ:

Για την περίπτωση αυτη το αναμενόμενο κέρδος ειναι:

$$E[X] = \frac{2}{10}\frac{4}{10}400 + \frac{2}{10}\frac{3}{10}200 + \frac{2}{10}\frac{3}{10}100 +$$
$$+ \frac{6}{10}\frac{4}{10}300 + \frac{6}{10}\frac{3}{10}100 + \frac{6}{10}\frac{3}{10}0 + \frac{2}{10}0 = 140$$

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2, \text{όπου}$$
$$E[X^2] = \frac{2}{10}\frac{4}{10}400^2 + \frac{2}{10}\frac{3}{10}200^2 + \frac{2}{10}\frac{3}{10}100^2 +$$
$$+ \frac{6}{10}\frac{4}{10}300^2 + \frac{6}{10}\frac{3}{10}100^2 + \frac{6}{10}\frac{3}{10}0 + \frac{2}{10}0 = 39200$$
$$\text{άρα}$$
$$var[X] = 39200 - 140^2 = 19600 \text{ οπότε } \sigma = 140$$

Στην δεύτερη περίπτωση πρώτα εκτελείται το βήμα Σ και μετά το Μ:



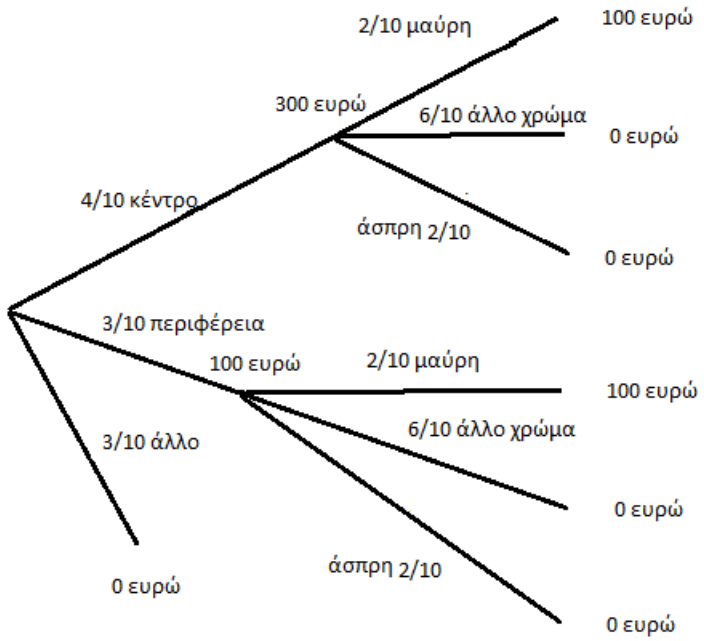
Στη περίπτωση αυτή το αναμενόμενο κέρδος είναι:

$$E[X] = \frac{4}{10}\frac{2}{10}400 + \frac{4}{10}\frac{6}{10}300 + \frac{4}{10}\frac{2}{10}300 + \\ + \frac{3}{10}\frac{2}{10}200 + \frac{3}{10}\frac{6}{10}100 + \frac{3}{10}\frac{2}{10}100 + \frac{3}{10}0 = 164$$

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2, \text{όπου} \\ E[X^2] = \frac{4}{10}\frac{2}{10}400^2 + \frac{4}{10}\frac{6}{10}300^2 + \frac{4}{10}\frac{2}{10}300^2 + \\ + \frac{3}{10}\frac{2}{10}200^2 + \frac{3}{10}\frac{6}{10}100^2 + \frac{3}{10}\frac{2}{10}100^2 + \frac{3}{10}0 = 39200 \\ \text{άρα } var[X] = 46400 - 26896 = 19504 \text{ οπότε } \sigma = 139,7$$

Θέμα 4. Η πιθανότητα να φοράει κάποιος γραβάτα τις πρωινές ώρες είναι 0,05 (και αυτό ανεξάρτητα από το τι κάνουν οι υπόλοιποι). Έστω ότι ένα πρωί βρίσκεστε σε ένα πολυκατάστημα με N πελάτες.
α) Ποια η πιθανότητα να υπάρχει ένας πελάτης με γραβάτα·
β) Ποια η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης με γραβάτα·
γ) Ποια πρέπει να είναι η τιμή του N ώστε η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 πελάτες με γραβάτα να είναι μεγαλύτερη του 0,25·

Λύση:
Εστω k αριθμός πελατών με γραβάτα.



α) Η πιθανότητα απο τους N πελάτες ένας να φοράει γραβάτα ειναι:
$P(1) = \binom{N}{1} 0.05\ 0.95^{N-1}$

β) Η πιθανότητα τουλάχιστον ένας να φοράει γραβάτα ειναι:
$P(k \geq 1) = 1 - P(0)$, όπου
$P(0) = \binom{N}{0} 0.05^0 0.95^N = 0.95^N$

γ) Πρέπει $P(k \geq 2) > 0.25$ δηλαδή
$1 - P(0) - P(1) > 0.25$ όπου το N προκύπτει αντικαθιστώντας το $P(0)$, $P(1)$ και λύνοντας την ανίσωση.

Θέμα 5. Έστω ότι οι τηλεφωνικές κλήσεις που δέχεται κατά μέσο όρο το κέντρο εξυπηρέτησης πελατών μιας εταιρίας είναι 60-ανα ώρα (ανεξάρτητα από την ώρα).
α) Ποια η πιθανότητα να δεχτεί 60 κλήσεις μέσα σε μισή ώρα·
β) Δώστε ένα μέτρο της αβεβαιότητας του αριθμού των κλήσεων που θα δεχτεί σε 2 ώρες.
γ) Αν υποθέσουμε ότι μια τηλεφωνήτρια απατάει 30 κλήσεις ανά ώρα, πόσες τηλεφωνήτριες πρέπει να διαθέτει η εταιρία ώστε η πιθανότητα μια κλήση να μείνει αναπάντητη να είναι μικρότερη του 0,1.

Λύση:
Η πιθανότητα να έχω k κλήσεις μέσα σε μία ωρα δίνεται απο την κατανομή $Poisson$ με παράμετρο $\lambda = 60$:
$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Η πιθανότητα να εχω k κλήσεις μέσα σε x ωρα δίνεται απο την κατανομή $Poisson$ με παράμετρο $\lambda' = \lambda x$:

α) για μισή ώρα $\lambda' = 60/2 = 30$ οπότε και: $p(k = 60) = e^{-30}\frac{30^{60}}{60!}$

β) για δυο ωρες $\lambda' = 60 \times 2 = 120$. Το μέτρο αβεβαιότητας ειναι: η διακύμανση $var[k]$ όπου είναι γνωστο ότι για την κατανομή $Poisson$ είναι $\sigma = \lambda = 120$

γ) Ν τηλεφωνήτριες απαντούν 30Ν τηλεφωνήματα μέσα σε μία ώρα ($\lambda = 60$)
$p(k) = e^{-60}\frac{60^k}{k!}$
Για να έχω τουλάχιστον μια μη απαντημένη κληση πρέπει $K > 30N$. Η ζητούμενη πιθανότητα ειναι: $\sum_{k=30N+1}^{\infty} p(k) < 0.1$ οπου λύνοντας την ανίσωση βρίσκουμε το Ν.

Θέμα 6. Ένας υποβρύχιος ψαράς χτυπάει ένα μεγάλο ψάρι • όταν το δει κοντά του- με πιθανότητα 0,4. Σε κάθε βουτιά που κάνει, βλέπει μεγάλο ψάρι στο 30% των περιπτώσεων. Μια μέρα που έχει μεγάλα κέφια κάνει 45 βουτιές.
α) Ποια η πιθανότητα να χτυπήσει 10 μεγάλα ψάρια·
β) Ποιος είναι κατά προσέγγιση ο αναμενόμενος αριθμός ψαριών που θα χτυπήσει·

Λύση Σε κάθε βουτιά θα βγάλει μεγάλο ψαρι με πιθανότητα $P = 0.4\ 0.3 = 0.12$
$P(k = 10\psi\alpha\rho\iota\alpha) = \binom{45}{10} 0.12^{10} 0.88^{45-10}$

Κατά προσέγγιση ο αναμενόμενος αριθμός ψαριών είναι $\lambda = np = 45 \times 0.12 = 5.4$