

Άσκηση 1

Ἡ συνάρτηση κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X εἶναι

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Βρεῖτε (α) τὴ συνάρτηση πυκνότητας, (β) τὴν πιθανότητα νὰ εἶναι $X > 2$ καὶ (γ) τὴν πιθανότητα νὰ εἶναι $-3 < X \leq 4$.

$$(a) \quad f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad P(X > 2) = \int_2^{\infty} 2e^{-2u} du = -e^{-2u} \Big|_2^{\infty} = e^{-4}$$

Ἄλλη μέθοδος.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ $P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-4}$. Ἀρα

$$P(X > 2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} P(-3 < X \leq 4) &= \int_{-3}^4 f(u) du = \int_{-3}^0 0 du + \int_0^4 2e^{-2u} du \\ &= -e^{-2u} \Big|_0^4 = 1 - e^{-8} \end{aligned}$$

Ἄλλη μέθοδος.

$$\begin{aligned} P(-3 < X \leq 4) &= P(X \leq 4) - P(X \leq -3) \\ &= F(4) - F(-3) \\ &= (1 - e^{-8}) - (0) = 1 - e^{-8} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{άλλιως} \end{cases}$$

Νά βρεθούν (α) η περιθώρια πυκνότητα της X , (β) η περιθώρια πυκνότητα της Y , (γ) η πυκνότητα υπό συνθήκη της X , (δ) η πυκνότητα υπό συνθήκη της Y .

Η περιοχή όπου η $f(x, y)$ είναι διάφορη του μηδενός παριστάνεται σκιασμένη στο Σχ. 2-23.

- (α) Για να βρούμε την περιθώρια πυκνότητα της X κρατάμε σταθερό το x και ολοκληρώνουμε ως προς y από 0 έως x (κατακόρυφη λουρίδα στο Σχ. 2-23). Βρίσκουμε

$$f_1(x) = \int_{y=0}^x 8xy \, dy = 4x^3$$

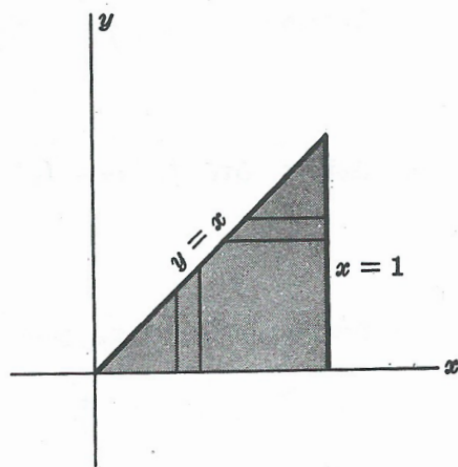
για $0 < x < 1$. Για όλα τα άλλα x είναι $f_1(x) = 0$.

- (β) Όμοια, η περιθώρια πυκνότητα της Y προκύπτει εάν ολοκληρώσουμε ως προς x με σταθερό y από $x = y$ έως $x = 1$ (οριζόντια λουρίδα στο Σχ. 2-23). Για $0 < y < 1$ βρίσκουμε

$$f_2(y) = \int_{x=y}^1 8xy \, dx = 4y(1 - y^2)$$

Για όλες τις άλλες τιμές του y είναι $f_2(y) = 0$.

Σχ. 2-23



- (γ) Η συνάρτηση πυκνότητας υπό συνθήκη της X για $0 < y < 1$ είναι

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} 2x/(1 - y^2) & y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{για άλλα } x \end{cases}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας υπό συνθήκη δεν ορίζεται, όταν $f_2(y) = 0$.

- (δ) Η συνάρτηση πυκνότητας υπό συνθήκη της Y για $0 < x < 1$ είναι

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} 2y/x^2 & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{για άλλα } y \end{cases}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας υπό συνθήκη δεν ορίζεται, όταν $f_1(x) = 0$.

Άσκηση 3

Ένας τοξότης έχει βρεί ότι ή πιθανότητα νά κτυπήσει τό στόχο μεταξύ r καί $r + dr$ είναι

$$P(r \leq R \leq r + dr) = c \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] dr$$

όπου R είναι ή απόσταση τοῦ σημείου πού χτύπησε τό βέλος από τό κέντρο, c μιά σταθερή καί a ή ακτίνα τοῦ στόχου (Σχ. 2-24). Ὑπολογίστε τήν πιθανότητα νά κτυπήσει ό τοξότης τό «κέντρο», πού θεωρεῖται ότι έχει ακτίνα b . Δεχτείτε ότι ό τοξότης πετυχαίνει πάντα τό στόχο.

Ἡ συνάρτηση πυκνότητας είναι

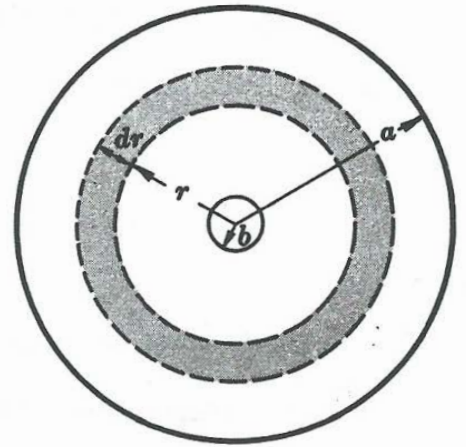
$$f(r) = c \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

Ἐπειδή ό τοξότης πετυχαίνει πάντα τό στόχο, έχουμε

$$c \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] dr = 1$$

ἀπ' όπου $c = 3/2a$. Συνεπώς ή ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\int_0^b f(r) dr = \frac{3}{2a} \int_0^b \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] dr = \frac{b(3a^2 - b^2)}{2a^3}$$



Σχ. 2-24

Άσκηση 4

Έάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{άλλιως} \end{cases}$$

νά βρεθούν (a) ή σταθερή c , (b) οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X και Y , (c) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y , (d) ή $P(3 < X < 4, Y > 2)$, (e) ή $P(X > 3)$, (f) ή $P(X + Y > 4)$, (g) ή κοινή συνάρτηση κατανομής και (h) νά εξεταστεί εάν οι X και Y είναι ανεξάρτητες ή όχι.

(a) Η ολική πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} \int_{x=2}^6 \int_{y=0}^5 c(2x + y) dx dy &= \int_{x=2}^6 c \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^5 dx \\ &= \int_{x=2}^6 c \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx = 210c \end{aligned}$$

Επειδή αυτή ισούται με 1, έχουμε $c = 1/210$.

(b) Η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P(X \leq x) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv \\ &= \begin{cases} \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^{\infty} 0 du dv = 0 & x < 2 \\ \int_{u=2}^x \int_{v=0}^5 \frac{2u+v}{210} du dv = \frac{2x^2 + 5x - 18}{84} & 2 \leq x < 6 \\ \int_{u=2}^6 \int_{v=0}^5 \frac{2u+v}{210} du dv = 1 & x \geq 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της Y είναι

$$\begin{aligned} F_2(y) &= P(Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^y f(u, v) du dv \\ &= \begin{cases} \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^y 0 du dv = 0 & y < 0 \\ \int_{u=2}^6 \int_{v=0}^y \frac{2u+v}{210} du dv = \frac{y^2 + 16y}{105} & 0 \leq y < 5 \\ \int_{u=2}^6 \int_{v=0}^5 \frac{2u+v}{210} du dv = 1 & y \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Ἡ περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας τῆς X εἶναι

$$f_1(x) = \frac{d}{dx} F_1(x) = \begin{cases} (4x+5)/84 & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{ἄλλιῶς} \end{cases}$$

Ἡ περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας τῆς Y εἶναι

$$f_2(y) = \frac{d}{dy} F_2(y) = \begin{cases} (2y+16)/105 & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{ἄλλιῶς} \end{cases}$$

$$(d) \quad P(3 < X < 4, Y > 2) = \frac{1}{210} \int_{x=3}^4 \int_{y=2}^5 (2x+y) dx dy = \frac{3}{20}$$

$$(e) \quad P(X > 3) = \frac{1}{210} \int_{x=3}^6 \int_{y=0}^5 (2x+y) dx dy = \frac{23}{28}$$

$$(f) \quad P(X+Y > 4) = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$$

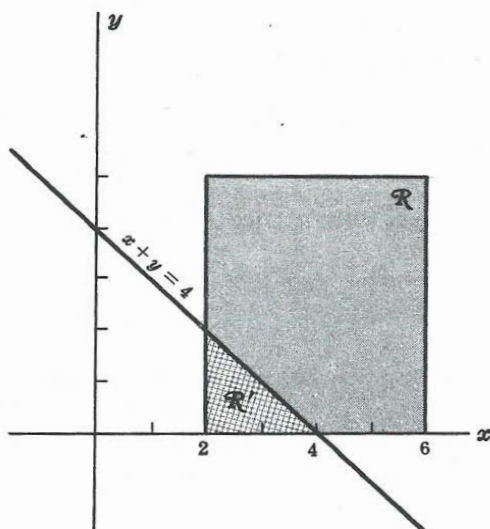
ὅπου $\mathcal{R}$ εἶναι ἡ σκιασμένη περιοχή τοῦ Σχ. 2-26. Ἡ πιθανότητα αὕτη ὑπολογίζεται εὐκολότερα, ἂν γράψουμε

$$P(X+Y > 4) = 1 - P(X+Y \leq 4) = 1 - \iint_{\mathcal{R}'} f(x, y) dx dy$$

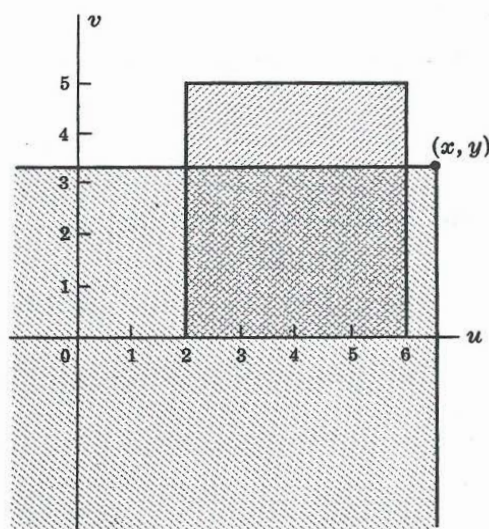
ὅπου $\mathcal{R}'$ ἡ μικρὴ τριγωνικὴ περιοχή τοῦ Σχ. 2-26. Εὐκόλα φαίνεται ὅτι

$$P(X+Y \leq 4) = \frac{1}{210} \int_{x=2}^4 \int_{y=0}^{4-x} (2x+y) dx dy = \frac{2}{35}$$

καὶ συνεπῶς $P(X+Y > 4) = 33/35$.



Σχ. 2-26



Σχ. 2-27

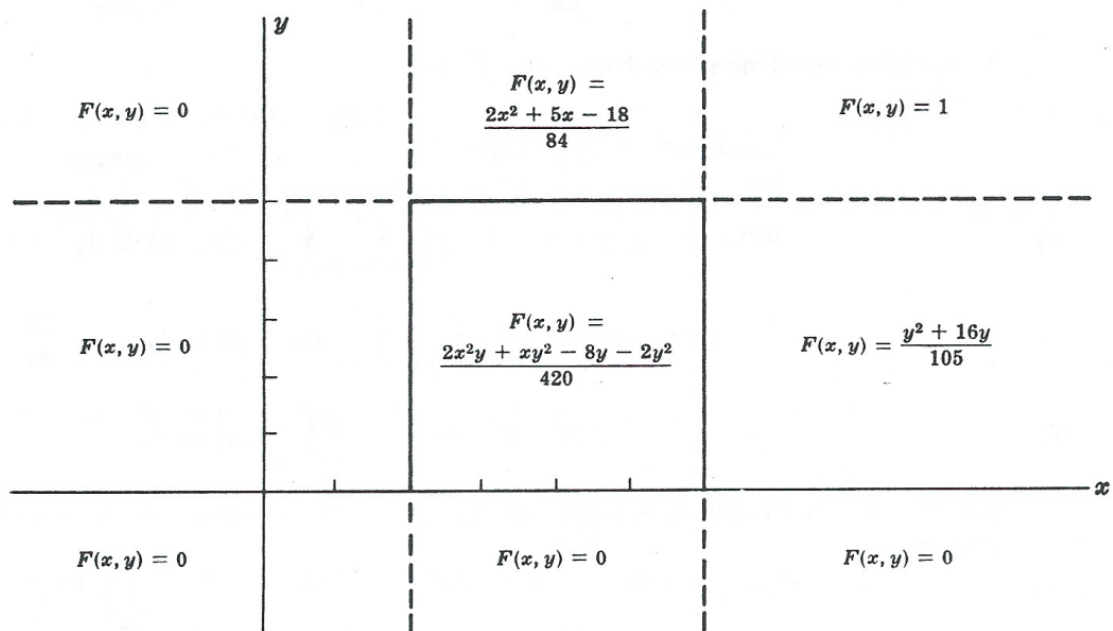
(g) Ἡ κοινὴ συνάρτηση κατανομῆς εἶναι

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Στὸ ἐπίπεδο uv (Σχ. 2-27) ἡ περιοχή ὁλοκληρώσεως εἶναι τὸ κοινὸ τμήμα τῶν περιοχῶν $u \leq x$, $v \leq y$ καὶ $2 < u < 6$, $0 < v < 5$ [σ' αὐτὸ τὸ τμήμα ἡ $f(u, v)$ εἶναι διάφορη τοῦ μηδενός]. Γιὰ τὸ σημεῖο (x, y) τοῦ Σχ. 2-27 ἔχουμε

$$F(x, y) = \int_{u=2}^x \int_{v=0}^y \frac{2u+v}{210} du dv = \frac{16y+y^2}{105}$$

Γιά σημείο (x, y) σ' άλλη περιοχή, π.χ. μέσα στο όρθογώνιο, παίρνουμε άλλο αποτέλεσμα, αλλά ή μέθοδος είναι ή ίδια. Τά πλήρη αποτελέσματα δίνονται στο Σχ. 2-28.



Σχ. 2-28

(h) Οί τυχαίες μεταβλητές δέν είναι ανεξάρτητες, έπειδιή

$$f(x, y) \neq f_1(x) f_2(y)$$

ή, ισοδύναμα, $F(x, y) \neq F_1(x) F_2(y)$.

Άσκηση 5

Η κοινή συνάρτηση πυκνότητας δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/96 & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{άλλιως} \end{cases}$$

Υπολογίστε τις (a) $E(X)$, (b) $E(Y)$, (c) $E(XY)$, (d) $E(2X + 3Y)$.

$$(a) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^5 x \left(\frac{xy}{96} \right) dx dy = \frac{8}{3}$$

$$(b) \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^5 y \left(\frac{xy}{96} \right) dx dy = \frac{31}{9}$$

$$(c) \quad E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy) f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^5 (xy) \left(\frac{xy}{96} \right) dx dy = \frac{248}{27}$$

$$(d) \quad E(2X + 3Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (2x + 3y) f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^4 \int_{y=1}^5 (2x + 3y) \left(\frac{xy}{96} \right) dx dy = \frac{47}{3}$$

Άλλη μέθοδος.

(c) Έπειδή οι X και Y είναι ανεξάρτητες, έχουμε

$$E(XY) = E(X) E(Y) = \left(\frac{8}{3} \right) \left(\frac{31}{9} \right) = \frac{248}{27}$$

(d) Από τα Θεωρ. 3.1 και 3-2 της σελ. 77 έχουμε

$$E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \left(\frac{8}{3} \right) + 3 \left(\frac{31}{9} \right) = \frac{47}{3}$$

Άσκηση 6

Ένα εργοστάσιο ζάχαρης έχει τρία τμήματα αρχικής επεξεργασίας ζαχαρότευτλων. Η ποσότητα των τεύτλων, μετρούμενη σε τόνους, που επεξεργάζεται σε μία μέρα κάθε ένα από τα τρία τμήματα είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 4 τόνους, που μπορεί να θεωρηθεί εκθετική. Αν τα τμήματα λειτουργούν ανεξάρτητα, να βρεθεί η πιθανότητα σε μία δοσμένη μέρα δύο ακριβώς από τα τμήματα να επεξεργαστούν περισσότερους από 4 τόνους τεύτλα.

Λύση

Αν X η ποσότητα των τεύτλων (σε τόνους) που επεξεργάζεται κάποιο τμήμα, τότε δίνεται ότι

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

και $EX = 4$. Αλλά $EX = \frac{1}{\lambda}$, οπότε $\lambda = \frac{1}{4}$. Ζητείται

$$P(X > 4) = \int_4^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_4^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = e^{-1} = 0.37.$$

Υποθέτοντας ότι τα τμήματα λειτουργούν ανεξάρτητα και θεωρώντας ως επιτυχία την επεξεργασία περισσότερων από 4 τόνους τεύτλων και Y την τ.μ. που μετρά πόσα τμήματα επεξεργάζονται πάνω από 4 τόνους τεύτλα, θα έχουμε:

$$P(Y=2) = \binom{3}{2} (0.37)^2 (1-0.37) = 0.26.$$

Άσκηση 7

Η ποσότητα X καφέ που βρίσκεται σε πακέτα 500 gr είναι τ.μ. με κατανομή $N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 gr.

- (i) Ποια είναι η πιθανότητα ένα μόνο πακέτο να περιέχει τουλάχιστον 490 gr;
- (ii) Το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 gr;

$$(i) \quad X \sim N(500, 25) \Rightarrow Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 490) &= P\left(\frac{X-500}{5} \geq \frac{490-500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z < -2) = \\ &= 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.9772 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} P(1 \text{ από τα τρία πακέτα έχει βάρος} \geq 490) &= \\ &= \binom{3}{1} (0.9772)^1 (0.0228)^2 = 0.001524. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad P(490 < X < 505) &= P\left(\frac{490-500}{5} < \frac{X-500}{5} < \frac{505-500}{5}\right) = \\ &= P(-2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:.

$$(0.8185)^3 = 0.54837.$$

Άσκηση 8

Το ποσό χρημάτων X που έχει ένας φοιτητής του Α.Π.Θ. στην τσέπη του είναι τ.μ. και $X \sim N(5000, 1000^2)$ (σε δραχμές) και για τον τυχαίο φοιτητή του Πανεπιστημίου Αθηνών έχουμε το ποσό $Y \sim N(6000, 1600^2)$.

- (i) Ποια η πιθανότητα, αν πάρουμε τυχαία τρεις φοιτητές του Α.Π.Θ., ο ένας να έχει τουλάχιστον 6000 δρχ. και ο καθένας από τους άλλους ≤ 6000 δρχ.
- (ii) Αν πάρουμε 9 φοιτητές του Α.Π.Θ., ποια η πιθανότητα να έχουν συνολικά τουλάχιστον 48000 δρχ.
- (iii) Αν πάρουμε έναν από το Α.Π.Θ. και έναν από το Π.Α., ποια η πιθανότητα να έχουν και οι δύο συνολικά, το πολύ 11880 δρχ.

Δίνεται: $X \sim N(5000, 1000^2)$, $Y \sim N(6000, 1600^2)$.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad P(X \leq 6000) &= P\left(\frac{X-5000}{1000} \leq \frac{6000-5000}{1000}\right) = P(Z_1 \leq 1) = \Phi(1) = \\ &= 0.8413, \text{ όπου } Z_1 = \frac{X-5000}{1000} \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Από τους 3 φοιτητές του ΑΠΘ ένας έχει } > 6000 \text{ και 2 έχουν } \leq 6000) &= \\ &= \binom{3}{2} (0.8413)^2 (0.1587) = 0.3370, \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad S = \sum_{i=1}^9 X_i \Rightarrow S \sim N(9 \cdot 5000, 9 \cdot 1000^2) \text{ ή } S \sim N(45000, 3000^2).$$

Άρα

$$\begin{aligned} P(S > 48000) &= P\left(\frac{S - 45000}{3000} > \frac{48000 - 45000}{3000}\right) = P(Z_2 > 1) = \\ &= 1 - \Phi(1) = 0.1587, \text{ όπου } Z_2 \sim N(0, 1). \end{aligned}$$

$$(iii) W = X + Y \sim N(5000 + 6000, 1000^2 + 1600^2) \Rightarrow W \sim N(11000, 1886.8^2)$$

$$\begin{aligned} P(W < 11880) &= P\left(\frac{W - 11000}{1886.8} < \frac{11880 - 11000}{1886.8}\right) = P(Z_3 < 0.47) = \\ &= \Phi(0.47) = 0.6808, \text{ όπου } Z_3 \sim N(0, 1). \end{aligned}$$