

8ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Γ. Καφεντζής

10 Ιανουαρίου 2014

Ασκηση 0.1

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή -10 και διασπορά $\sigma^2 = 4$, δηλαδή $X \sim N(-10, 4)$. Να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (ΑΣΚ) της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$, με θετικά ορίσματα του x .

(α) $P(X < 0)$

(β) $P(-10 < X < 5)$

(γ) $P(|X| \geq 5)$

(δ) $P(X^2 - 3X + 2 > 0)$

Στόχος να εκφράσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες ως $P(Y \leq y_0) = \Phi(y_0)$, με $Y \sim N(0, 1)$.

Λύση:

$$\alpha) P(X < 0) = P\left(\frac{X - (-10)}{2} < \frac{0 - (-10)}{2}\right) = P\left(\underbrace{\frac{X+10}{2}}_Y < 5\right) = \Phi(5).$$

$$\beta) P(-10 < X < 5) = P(X < 5) - P(X < -10) = \\ = P\left(\frac{X+10}{2} < \frac{15}{2}\right) - P\left(\frac{X+10}{2} < 0\right) = \Phi\left(\frac{15}{2}\right) - \Phi(0).$$

$$\gamma) P(|X| \geq 5) = P(X \geq 5 \cup X \leq -5) = P(X \geq 5) + P(X \leq -5) = \\ = 1 - P(X < 5) + P(X \leq -5) = 1 - P\left(\frac{X+10}{2} < \frac{15}{2}\right) + \\ + P\left(\frac{X+10}{2} \leq \frac{5}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{15}{2}\right) + \Phi\left(\frac{5}{2}\right).$$

$$\delta) P(X^2 - 3X + 2 > 0) = P((X-1)(X-2) > 0) = \\ = P(\{X-1 < 0\} \cup \{X-2 > 0\}) = P(X-1 < 0) + P(X-2 > 0) = \\ = P(X < 1) + P(X > 2) = \Phi\left(\frac{11}{2}\right) + 1 - \Phi(6).$$

Ασκηση 0.2

Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελείται από μια πηγή πληροφορίας, ένα κανάλι μετάδοσης και ένα δέκτη. Θεωρείστε μια πηγή πληροφορίας που παράγει ένα εκ τριών συμβόλων με την ίδια πιθανότητα. Στη συνέχεια, το κανάλι εισάγει θόρυβο παραμορφώνοντας το σήμα που έχει επιλεγεί για την αποστολή του εκάστοτε συμβόλου. Έτσι, ο δέκτης λαμβάνει την τιμή $Y = X + N$, όπου X η τιμή που στάλθηκε, N τυχαία μεταβλητή που παριστάνει προσθετικό θόρυβο με κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = 4$.

(α) Υποθέστε ότι ο πομπός κωδικοποιεί τα 3 σύμβολα ως -1, 0, 1. Στον δέκτη το λαμβανόμενο μήνυμα αποκωδικοποιείται ως εξής:

Αν $Y > 1/2$, τότε αποκωδικοποιεί στο 1.

Αν $Y < 1/2$, τότε αποκωδικοποιεί στο -1.

Αν $-1/2 \leq Y \leq 1/2$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Καθορίστε την πιθανότητα λάθους για το παραπάνω σχήμα κωδικοποίησης-αποκωδικοποίησης.

(β) Σε μια προσπάθεια να μειωθεί η πιθανότητα λάθους, οι ακόλουθες τροποποιήσεις γίνονται. Ο πομπός κωδικοποιεί τους 3 τύπους μηνυμάτων με τιμές -2, 0 και 2, ενώ ο δέκτης αποκωδικοποιεί ως εξής:

Αν $Y > 1/2$, τότε αποκωδικοποιεί στο 2.

Αν $Y < -1/2$, τότε αποκωδικοποιεί στο -2.

Αν $-1/2 \leq Y \leq 1/2$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Επαναλάβετε το βήμα (α) για αυτό το σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Λύση:

α) Λάθος συμβαίνει όταν ο δέκτης αποκωδικοποιεί 0 ή 1 ενώ στάλθηκε 0, όταν αποκωδικοποιεί -1 ή 1 ενώ έχει σταλεί 0, ή όταν αποκωδικοποιεί -1 ή 0 ενώ έχει σταλεί 1. Άρα:

$$\begin{aligned} P_e &= P(\cancel{X=-1}) P(Y \geq -\frac{1}{2} | X=-1) + \\ &\quad P(\cancel{X=1}) P(Y \leq \frac{1}{2} | X=1) + \\ &\quad P(\cancel{X=0}) P(|Y| > \frac{1}{2} | X=0) = \\ &= \frac{1}{3} P(-1+N \geq -\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} P(1+N \leq \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} P(|N| > \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{3} P(N \geq \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} P(N \leq -\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} P(N > \frac{1}{2}) + \\ &\quad \frac{1}{3} P(N < -\frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3} P(N \geq \frac{1}{2}) + \frac{2}{3} P(N \leq -\frac{1}{2}) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Όπως η κανονική κατανομή είναι συμμετρική, δηλαδή

ισχύει $P(N \geq \frac{1}{2}) = P(N \leq -\frac{1}{2})$ και άρα η ① γράφεται:

$$P_e = \frac{4}{3} P(N \leq -\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} P\left(\frac{N - \overset{\text{Y}}{0}}{2} \leq -\frac{1}{4}\right) = \\ = \frac{4}{3} \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{*}{=} \frac{4}{3} \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.535.$$

β) Όπως ακριβώς με το (α) ερώτημα, καταλήγουμε στο

$$P_e' = \frac{2}{3} \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{2}{3} \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \\ = 0.418.$$

Παρατηράτε ότι $P_e' < P_e$, δηλαδή η πιθανότητα να έχουμε εφάλμα μειώθηκε λόγω της μεγαλύτερης απόστασης των συβόλων της πηγής.

* Ισχύει ότι $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$

Άσκηση 0.3

Για μια δοσμένη τυχαία μεταβλητή X ορίστε την τυχαία μεταβλητή Y ως:

$$Y = aX^2 + b.$$

(α) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y συναρτήσει της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X , του a και του b .

(β) Εστω X μια κανονική(γκαουσιανή) τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 . Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X^2$.

Λύση:

α) Θα βρούμε πρώτα την CDF της Y και μετά θα παραγωγίσουμε, γιατί $\frac{d}{dy} F_Y(y) = f_Y(y)$.

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= F_Y(y) = P(aX^2 + b \leq y) = P(X^2 \leq \frac{y-b}{a}) = \\ &= P(|X| \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}) = P(-\sqrt{\frac{y-b}{a}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}) = \\ &= \int_{-\sqrt{\frac{y-b}{a}}}^{\sqrt{\frac{y-b}{a}}} f_X(x) dx = F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right). \end{aligned}$$

Τέλος, είναι

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left(F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \right) = \\ &= \frac{d}{dy} \sqrt{\frac{y-b}{a}} f_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) + \frac{d}{dy} \sqrt{\frac{y-b}{a}} f_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y-b}{a}}} \left(f_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \right) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

β) Για $\alpha=1$, $\beta=0$, η $\textcircled{1}$ δίνει:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \text{ για}$$

$$0 \leq y < \infty.$$

Ασκηση 0.4

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{αν } 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ. ;

(β) Βρείτε την περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X .

(γ) Βρείτε την πιθανότητα $P(X+Y < 1)$.

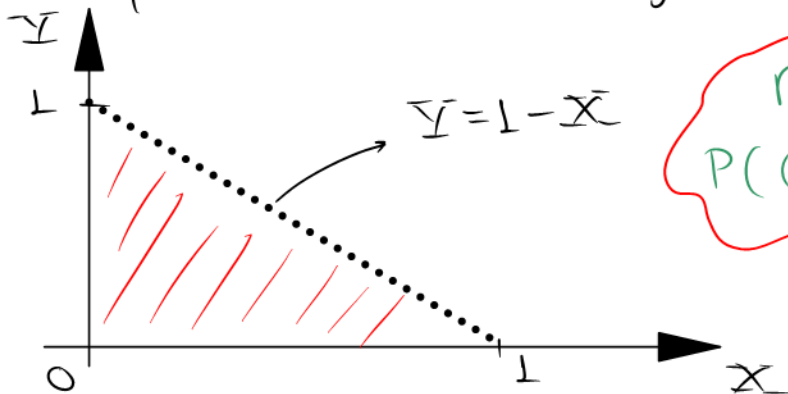
Λύση :

α) Όχι, γιατί $f_{X,Y}(x,y)$ δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων $f_X(x)$, $f_Y(y)$, δηλ.

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι } f_X(x) &= \int_y f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)' dy = xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}, \ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

γ) Από εκφώνηση, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Θέλουμε $X+Y < 1$.



Γνωρίζουμε ότι :

$$P((X,Y) \in B) = \int_B f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } P(X+Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left(x - x^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)' dx = \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ασκηση 0.5

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = xe^{-x(y+1)} \quad x > 0, \quad y > 0.$$

(α) Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X , δεδομένου του $Y = y$ και τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y , δεδομένου του $X = x$.

(β) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Z = XY$.

Λύση:

α) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$.

Άρα $f_{Y|X}(y|x) = \frac{xe^{-x(y+1)}}{\int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dy} = xe^{-xy}, \quad y > 0.$

και επίσης $f_{X|Y}(x|y) = \frac{xe^{-x(y+1)}}{\int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dx} = (y+1)^2 xe^{-x(y+1)}, \quad x > 0.$

β) Θα βρούμε τη CDF:

$$\begin{aligned} P(XY < z) &= P\left(X, Y < \frac{z}{X}\right) \stackrel{*}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{z/x} xe^{-x(y+1)} dy dx = \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-z}) e^{-x} dx = 1 - e^{-z} = F_Z(z). \end{aligned}$$

Άρα $f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = e^{-z}, \quad z > 0.$

* Γιατί $P((X,Y) \in B) = \int_B f_{X,Y}(x,y) dx dy$

Ασκηση 0.6

Το πλάτος των βιδών που παράγονται σε κάποιο εργοστάσιο ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0.9 \text{ cm}$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003 \text{ cm}$, δηλαδή $X \sim N(0.9, 0.003^2)$.

(α) Αν οι τεχνικές προδιαγραφές των πελατών επιβάλουν το πλάτος των βιδών να είναι 0.9 ± 0.005 cm, (επομένως βίδες με πλάτος εκτός αυτών των ορίων να θεωρούνται ελαττωματικές) τι ποσοστό των βιδών που παράγονται από αυτό το εργοστάσιο είναι ελαττωματικές;

(β) Στόχος της εταιρίας είναι κατά μέσο όρο μόνο μία στις 100 βίδες να βγαίνει ελαττωματική. Ποια η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για την τυπική απόκλιση, σ , ώστε η εταιρία να πετυχαίνει το στόχο της;

Λύση:

α) Θα βρούμε πρώτα το ποσοστό των μη-ελαττωματικών βιδών.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } P(0.9 - 0.005 \leq X \leq 0.9 + 0.005) &= \\ &= P\left(-\frac{0.005}{0.003} \leq \frac{X - 0.9}{0.003} \leq \frac{0.005}{0.003}\right) = P\left(-\frac{5}{3} \leq Y \leq \frac{5}{3}\right) = \\ &\quad Y \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

$$= P\left(Y \leq \frac{5}{3}\right) - P\left(Y \leq -\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \simeq 0.90$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } P(\text{ελαττωματική}) &= 1 - P(\text{μη ελαττωματική}) \simeq 1 - 0.90 \simeq \\ &\simeq 0.1 \Rightarrow 10\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Θέλουμε } P\left(-\frac{0.005}{\sigma} \leq Y \leq \frac{0.005}{\sigma}\right) &= \\ &= P\left(Y \leq \frac{0.005}{\sigma}\right) - P\left(Y \leq -\frac{0.005}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0.005}{\sigma}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.99 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) \geq 1.99 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) \geq 0.995 \simeq \Phi(2.575). \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } \Phi \text{ φανέρωνει, θα έχουμε } \frac{0.005}{\sigma} \geq 2.575 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma \leq \frac{0.005}{2.575}. \text{ Άρα } \boxed{\sigma_{\max} = \frac{0.005}{2.575}}$$

Ασκηση 0.7

Η διάρκεια της ζωής για μία κατηγορία ηλεκτρονικών εξαρτημάτων τα οποία παράγει μία εταιρία ημιαγωγών ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 1.4 \times 10^6$ ώρες και $\sigma = 3 \times 10^5$ ώρες. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα κιβώτιο 100 εξαρτημάτων θα περιέχει τουλάχιστον 20 εξαρτήματα των οποίων η διάρκεια ζωής είναι μικρότερη από 1.8×10^6 ώρες.

Χρησιμοποιείστε ότι $\Phi(1.33) = 0.9082$.

Λύση:

Για ένα εξάρτημα, η πιθανότητα η διάρκεια ζωής του να είναι μικρότερη από $1.8 \cdot 10^6$ ώρες είναι:

$$P(X \leq 1.8 \cdot 10^6) = P\left(\frac{X - 1.4 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5} \leq \frac{1.8 \cdot 10^6 - 1.4 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5}\right) =$$

$\uparrow \sim N(0,1)$

$$= P\left(Y \leq \frac{0.4 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5}\right) = P\left(Y \leq \frac{4}{3}\right) = \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 0.9082.$$

Έστω Z ο αριθμός των εξαρτημάτων με διάρκεια ζωής μικρότερη από $1.8 \cdot 10^6$ ώρες. Προφανώς, η Z είναι διωνυμική τ.τ. με παραμέτρους $(n, p) = (100, 0.9082)$. Η πιθανότητα να περιέχονται τουλάχιστον 20 εξαρτήματα με διάρκεια ζωής μικρότερη από $1.8 \cdot 10^6$ ώρες στο κιβώτιο των 100 εξαρτημάτων ισάται με:

$$P(Z \geq 20) = \sum_{k=20}^{100} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$$

Προφανώς δεν υπολογίζεται εύκολα. Εναλλακτικά, $P(Z \geq 20) = 1 - P(Z < 20) =$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{19} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k},$$

όπου κι αυτό υπολογίζεται δύσκολα. Με χρήση Η/Υ, βρίσκουμε ότι $\sum_{k=0}^{19} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} = 2.12 \cdot 10^{-65}$, άρα

$$P(Z \geq 20) = 1 - 2.12 \cdot 10^{-65} \approx 1.$$

Ασκηση 0.8

Το πλάτος ενός μεταλλικού ίχνους σε μία πλακέτα ψηφιακού κυκλώματος μοντελοποιείται ως μια Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 0.9 \mu m$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003 \mu m$.

(α) Ίχνη που το πλάτος τους δεν βρίσκεται στο εύρος τιμών $0.9 \pm 0.005 \mu m$ είναι ελαττωματικά. Τι ποσοστό των ιχνών είναι ελαττωματικά;

(β) Μια νέα μέθοδος κατασκευής κυκλωμάτων, η οποία παράγει ίχνη με μικρότερες αποκλίσεις πλάτους, θέλουμε να μην παράγει παραπάνω από ένα ελαττωματικό ίχνος στα 100. Ποια πρέπει είναι η μέγιστη τιμή του σ για την νέα μέθοδο ώστε αυτή να πετυχαίνει το στόχο της;

Λύση:

α) Υποθέτουμε ότι $X \sim N(0.9, 0.003^2)$. Ελαττωματικά θεωρείται ένα ίχνος όταν $\{X < 0.9 - 0.005\}$ ή $\{X > 0.9 + 0.005\}$.
Ας βρούμε πόσα ΔΕΝ είναι ελαττωματικά:

$$P(0.9 - 0.005 \leq X \leq 0.9 + 0.005) =$$

$$P\left(-\frac{0.005}{0.003} \leq \underbrace{Y}_{N(0,1)} \leq \frac{0.005}{0.003}\right) = P\left(-\frac{5}{3} \leq Y \leq \frac{5}{3}\right) =$$

$$P\left(Y \leq \frac{5}{3}\right) - P\left(Y \leq -\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \approx$$
$$\approx 0.945. \text{ Άρα } P(\text{ελαττωματικό ίχνος}) = 1 - 0.945 = 0.055.$$

β) Πρέπει να βρούμε τη μέγιστη τιμή του σ ώστε

$$2\Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.99 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) \geq 1.99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) \geq 0.995 = \Phi(2.575) \stackrel{\Phi \uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{0.005}{\sigma} \geq 2.575$$

$$\Leftrightarrow \sigma \leq \frac{0.005}{2.575} \approx 0.00194.$$

$$\text{Άρα } \sigma_{\max} = 0.00194.$$