

7ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Μ. Κουτσογιαννάκη

4 Δεκεμβρίου 2013

Άσκηση 0.1

Θεωρείστε την ακόλουθη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y :

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 1, 3; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 2; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x,y)$. Δείξτε ότι η $p_{X,Y}(x,y)$ είναι μία έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές συν.πιθ. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

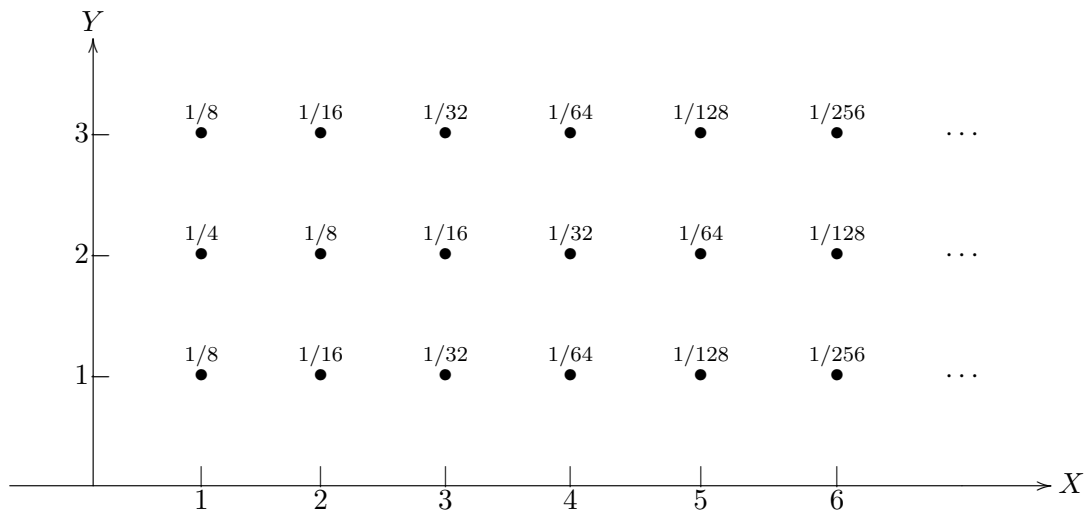
(γ) Αναγνωρίστε το όνομα της κατανομής της τ.μ. X και την παράμετρο αυτής. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά της, $var(X)$.

(δ) Έστω $Z = 2X + Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, και τη διασπορά, $var(Z)$, της Z .

(ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη συν.πιθ. $p_{Z/X}(z/x = 1)$.

Λύση :

(α)



Επίσης, $0 < P_{\underline{X}, \underline{Y}}(x, y) < 1$, $\forall (x, y)$ και

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{+\infty} \sum_{y=1}^3 P_{\underline{X}, \underline{Y}}(x, y) &= \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{2} \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{4} \frac{1/2}{1-1/2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Άρα η $P_{\underline{X}, \underline{Y}}(x, y)$ είναι έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

β) Είναι $P_{\underline{X}}(x) = \sum_{y=1}^3 P_{\underline{X}, \underline{Y}}(x, y) =$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

$$x = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_{\underline{Y}}(y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P_{\underline{X}, \underline{Y}}(x, y) = \begin{cases} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & y=1, 3 \\ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{\underline{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{1/2}{1-1/2}, & y=1, 3 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/2}, & y=2 \end{cases} = \begin{cases} 1/4, & y=1, 3 \\ 1/2, & y=2 \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι $P_{\underline{X}, \underline{Y}}(x, y) = P_{\underline{X}}(x) P_{\underline{Y}}(y)$, άρα οι $\underline{X}, \underline{Y}$ είναι ανεξάρτητες.

γ) Η γεωμετρική κατανομή έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1,2,3,\dots$$

Άρα προφανώς η τ.φ. X στο πρόβλημά μας είναι γεωμετρική με παράμετρο $p=1/2$. Επομένως, $E[X] = \frac{1}{p} = 2$ και $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

δ) Είναι $E[Z] = E[2X + Y^2] = 2E[X] + E[Y^2]$ ①

Όμως, $E[Y^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ ②

Άρα ① $\xrightarrow{②}$ $E[Z] = 2 \cdot 2 + \frac{9}{2} = 17/2$.

και
 $\text{var}(Z) = \text{var}(2X + Y^2) = \text{var}(2X) + \text{var}(Y^2)$ (λόγω ανεξ.)
 $= 4\text{var}(X) + \text{var}(Y^2) =$
 $= 4\text{var}(X) + E[Y^4] - E[Y^2]^2$ ③

Όμως, $E[Y^4] = 1^4 \cdot \frac{1}{4} + 3^4 \cdot \frac{1}{4} + 2^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{57}{2}$ ④

Άρα ③ $\xrightarrow{④}$ $\text{var}(Z) = 4 \cdot 2 + \frac{57}{2} - \frac{81}{4} = \frac{65}{4}$.

ε) Έχουμε $P_{Z|X}(z|X=1) = P(\{Z=z\}|\{X=1\}) =$
 $= P(\{2X + Y^2 = z\}|\{X=1\}) = P(\{2 + Y^2 = z\}) =$
 $= \begin{cases} 1/4, & z=3, 11 \\ 1/2, & z=6 \end{cases},$

αφά η τ.φ. Y παίρνει ως τιμές 1, 2, 3 με πιθανότητες 1/4, 1/2, 1/4 αντιστοίχα.

Ασκηση 0.2

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

X \ Y	1	2	3
-1	1/6	0	1/5
0	1/18	1/9	2/15
1	1/12	c	0

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X = x_2, Y = y_1)$.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές συν.πιθ. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.

(γ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

(δ) Να βρεθούν οι $E[X], E[Y], E[XY], cov(X, Y), \rho(X, Y)$.

Λύση:

α) Από τον πίνακα φαίνεται ότι $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ και $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3$. Άρα

$$\sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x,y) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{12} + c = 1$$

Άρα $c = \frac{1}{4}$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X=x_2, Y=y_1) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{18}$$

$$\beta) \text{ Είναι } P(X=-1) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

$$P(X=0) = \text{---} \text{ " } \text{---} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=1) = \text{---} \text{ " } \text{---} = \frac{1}{12} + c + 0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } p_X(x) = \begin{cases} 11/30, & x=-1 \\ 3/10, & x=0 \\ 1/3, & x=1 \end{cases}$$

$$\text{Όφεια, } P(Y=1) = \sum_x P_{X,Y}(x,y) = \frac{11}{36}$$

$$P(Y=2) = \frac{13}{36}$$

$$P(Y=3) = \frac{5}{15}$$

$$\text{Άρα } P_Y(y) = \begin{cases} 11/36, & y=1 \\ 13/36, & y=2 \\ 5/15, & y=3 \end{cases}$$

γ) ελέγχουμε αν ισχύει $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) \quad \forall x,y$.

$$\text{Βλέπουμε ότι } P_X(-1) = \frac{3}{11}, \quad P_Y(1) = \frac{11}{36}, \quad \text{έτσι } P_{X,Y}(-1,0) = \frac{1}{6} \neq P_X(-1)P_Y(1) = \frac{1}{12}.$$

Άρα οι X, Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες.

δ) Είναι: $E[X] = \sum_{x=-1}^1 \sum_{y=1}^3 x P_{X,Y}(x,y)$ ή ισοδύναμα

$$E[X] = \sum_{x=-1}^1 x P_X(x) = (-1) \frac{11}{36} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}.$$

Όφεια, $E[Y] = \sum_{y=1}^3 \sum_{x=-1}^1 y P_{X,Y}(x,y)$ ή ισοδύναμα

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y P_Y(y) = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{13}{36} + 3 \cdot \frac{5}{15} = \frac{73}{36}.$$

Επίσης, έχουμε

$$E[XY] = \sum_{x=-1}^1 \sum_{y=1}^3 xy P_{X,Y}(x,y) = (\text{npίτητος}) = -\frac{11}{60}.$$

Τώρα εύκολα υπολογίζεται:

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = \\ &= -\frac{11}{60} - \left(-\frac{1}{30}\right) \frac{73}{36} = -\frac{25}{216}.\end{aligned}$$

Τέλος, $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ ①. Πρέπει να βρούμε
τα σ_X και σ_Y .

$$\begin{aligned}\text{Άρα } \sigma_X^2 &= E[X^2] - E[X]^2, \text{ ή } E[X^2] = \\ &= \sum_{x=-1}^1 x^2 p_X(x) = \frac{21}{30} \text{ και } E[X] = -\frac{1}{30}, \text{ άρα}\end{aligned}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{21}{30} - \left(-\frac{1}{30}\right)^2 \Rightarrow \sigma_X = \frac{\sqrt{62}}{30}. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{Όμοια, } \sigma_Y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2, \text{ ή } E[Y^2] =$$

$$= \sum_{y=1}^3 y^2 p_Y(y) = \frac{19}{4} \text{ και } E[Y] = \frac{73}{36}, \text{ άρα}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{19}{4} - \left(\frac{73}{36}\right)^2 = \frac{827}{36^2} \Rightarrow \sigma_Y = \frac{\sqrt{827}}{36} \quad \textcircled{3}$$

$$\text{Οπότε, } \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \approx -0.552.$$

Ασκηση 0.3

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Υπολογίστε την τιμή $p_Y(2)$.

(γ) Θεωρείστε την τ.μ. $Z = YX^2$. Υπολογίστε τη συν.πιθ. της Z .

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη συν.πιθ. της τ.μ. X δεδομένου του γεγονότος $\{Y = 2\}$, δηλαδή την $p_{X/Y}(x/2)$. Βρείτε την $E[Z/Y = 2]$.

(ε) Υπολογίστε την δεσμευμένη διασπορά της Y δεδομένου του γεγονότος $\{X = 2\}$.

Λύση:

$$\alpha) \text{ Πρέπει } \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x,y) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c + c + 2c + 2c + 0 + 4c + 3c + c + 6c = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{20}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } p_Y(2) = \sum_{x=1}^3 p_{X,Y}(x,2) = 2c + 0 + 4c = 6c = \frac{3}{10}.$$

$\gamma)$ Το πεδίο τιμών της Z είναι το $\{1, 4, 9, 2, 18, 3, 12, 27\}$ και η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 3/20, & z=1 \\ 2/20, & z=2, 27 \\ 1/20, & z=3, 4, 12 \\ 6/20, & z=9 \\ 4/20, & z=18 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\delta) \text{ Είπαμε } P_{X|Y}(x|2) = \frac{P_{X,Y}(x,2)}{P_Y(2)} = \begin{cases} \frac{2c}{6c} = \frac{1}{3}, & x=1 \\ \frac{4c}{6c} = \frac{2}{3}, & x=3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[Z|Y=2] &= E[YX^2|Y=2] = \\ &= E[2X^2|Y=2] = \\ &= 2E[X^2|Y=2] = \\ &= 2 \sum_{x=1}^3 x^2 P_{X|Y}(x|2) = \\ &= 2 \left(1^2 \frac{1}{3} + 3^2 \frac{2}{3} \right) = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon) \text{ Ήχασαμε ότι} \\ P_{\bar{X}}(2) &= \sum_{y=1}^3 P_{\bar{X},Y}(2,y) = \\ &= c + 0 + c = 2c = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{και } P_{Y|\bar{X}}(y|2) = \frac{P_{\bar{X},Y}(2,y)}{P_{\bar{X}}(2)} = \begin{cases} \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}, & y=1 \\ \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}, & y=3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τη διασπορά $\text{var}(Y|\bar{X}=2)$ χρειαζόμαστε τις τιμές $E[Y^2|\bar{X}=2]$ και $E[Y|\bar{X}=2]$.

$$\left(\text{γιατί } \text{var}(Y|\bar{X}=2) = E[Y^2|\bar{X}=2] - E[Y|\bar{X}=2]^2 \right)$$

Άρα

$$E[Y^2 | X=2] = \sum_{y=1}^3 y^2 P_{Y|X}(y|2) = \\ = 1^2 \frac{1}{2} + 3^2 \frac{1}{2} = 5 \quad \textcircled{A}$$

και

$$E[Y | X=2] = \sum_{y=1}^3 y P_{Y|X}(y|2) = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2 \quad \textcircled{B}$$

Άρα τελικά θα έχουμε:

$$\text{var}(Y | X=2) = \textcircled{A} - \textcircled{B}^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\boxed{\text{var}(Y | X=2) = 1}$$