

6ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Μ. Κουτσογιαννάκη

20 Νοεμβρίου 2013

Ασκηση 0.1

Η πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος από ένα εργοστάσιο είναι ίση με 0.1. Αν τυχαία επιλέξουμε δείγμα 5 προϊόντων από το εργοστάσιο, να βρεθούν:

1. η πιθανότητα να προκύψουν 2 ελαττωματικά προϊόντα
2. η πιθανότητα να προκύψουν παραπάνω από 2 ελαττωματικά προϊόντα

Λύση:

Έστω X η τ.φ. των βετρώ το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων, με $p = 0.1$

Άρα η X είναι διωνυμική με παραμέτρους

$$(n, p) = (5, 0.1) \leadsto p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} 1) P(X=2) &= \binom{5}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^3 = \\ &= 0.0729. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - \\ &\quad - P(X=2) \\ &= 1 - 0.59 - 0.32 - 0.0729 \\ &= 0.0171. \end{aligned}$$

Ασκηση 0.2

Στο διπλανό εργοστάσιο η πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού προϊόντος είναι $p = 0.002$. Αν πάρουμε 1500 δείγματα, να βρεθεί η πιθανότητα να προκύψουν πάνω από 2 ελαττωματικά.

Λύση:

Έστω X η τ.φ. που μετρά το πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων. Μπορούμε να πούμε ότι είναι X Διωνυμική με $(n, p) = (1500, 0.002)$

$$\text{Άρα } P_X(k) = \binom{1500}{k} 0.002^k \cdot 0.998^{1500-k}$$

Όμως οι πράξεις με τέτοια νούμερα είναι δύσκολες. Μια εναλλακτική είναι να θεωρήσουμε την κατανομή ως Poisson, η οποία για $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$, μπορεί να θεωρηθεί ως προσέγγιση της Διωνυμικής. Η παράμετρος της Poisson είναι $\lambda = np = 1500 \cdot 0.002 = 3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}$

$$\text{Άρα } P_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-3} \frac{3^k}{k!}. \text{ Οπότε το}$$

Πρώτο θα είναι

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = \\ &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = \\ &= 1 - e^{-3} \left(1 + 3 + \frac{9}{2} \right) = 1 - \frac{17}{2} e^{-3}. \end{aligned}$$

Ασκηση 0.3

Έξι παίκτες κάθονται γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι, και ρίχνουν με τη σειρά ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Ξεκινά ο παίκτης 1, ακολουθεί ο παίκτης 2, κλπ. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρις ότου έρθει το πρώτο εξάρι, και ο παίκτης που το φέρνει κερδίζει το παιχνίδι. Απαντήστε στα ακόλουθα.

1. Ποιά η πιθανότητα ότι ο παίκτης 2 κερδίζει την πρώτη φορά που ρίχνει το ζάρι;
2. Ποιά η πιθανότητα ότι ο παίκτης 2 κερδίζει τη δεύτερη φορά που ρίχνει το ζάρι;
3. Ποιά η πιθανότητα ότι ο παίκτης 2 κερδίζει τη n -οστή φορά που ρίχνει το ζάρι;
4. Ποιά η πιθανότητα ότι ο παίκτης 2 κερδίζει το παιχνίδι;

Βοήθεια: Στο τελευταίο υποερώτημα χρησιμοποιήστε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, αν $|a| < 1$.

Λύση:

1. Η πιθανότητα $P(A)$, με $A = \{\text{ο παίκτης 2 κερδίζει την 1}^{\text{η}} \text{ φορά που ρίχνει}\}$ ισούται με $P(B \cap C)$, με $B = \{\text{ο παίκτης 1 δεν έφερε 6}\}$, $C = \{\text{ο παίκτης 2 έφερε 6 την πρώτη φορά που έριξε}\}$. Άρα

$$P(A) = P(B \cap C) \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.14$$

2. Όμοια, $P(\{\text{ο παίκτης 2 κερδίζει την 2}^{\text{η}} \text{ φορά}\}) = P(\{\text{οι πρώτοι 7 ρίψεις δεν έφεραν 6}\} \cap \{\text{ο παίκτης 2 έφερε 6 τη δεύτερη φορά}\}) \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} = 0.0465$

3. Ανάλογα, για την n -οστή φορά, θα είναι:

$$P_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)+1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ Προφανώς, } P &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)+1} \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]^n = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} = 0.21. \end{aligned}$$

Ασκηση 0.4

Είναι χειμώνας στο Ηράκλειο και δυο συμφοιτητές και συγγάτοικοι, ο Κώστας και ο Νίκος, αποφασίζουν να παίξουν το εξής παιχνίδι: ο Νίκος θα ρίξει διαδοχικά 4 φορές ένα κέρμα (με πιθανότητα κορώνας 0.4). Πριν τις ριψεις, θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ δυο επιλογών: α) να κερδίσει σε ευρώ ποσό X ίσο με το πλήθος των κορώνων που θα φέρει ή β) να κερδίσει σε ευρώ ποσό Y ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των κεφαλών μείον 1.5 φορές το πλήθος των κορώνων που θα φέρει.

1. Ποιά είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για το Νίκο; Δηλ. ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί το μέσο αναμενόμενο κέρδος του;
2. Στη γενική περίπτωση όπου η πιθανότητα να έρθει κορώνα είναι p , για ποιά ευρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική α) από τη β);

Λύση:

Έστω X το πλήθος των κορώνων σε 4 ριψεις κέρματος.

Προφανώς, η X είναι Διωνυμική τ.τ. με $n=4$ και

$p=0.4$. Άρα η κατανομή της είναι:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} 0.4^k \cdot 0.6^{4-k}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

$$1. \text{ Έχουμε } E[X] = np = 4 \cdot 0.4 = 1.6 \text{ και } \text{var}(X) =$$

$$= np(1-p) = 4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.96, \text{ οπότε είναι}$$

$$E[X^2] = \text{var}(X) + E[X]^2 = np(1-p) + (np)^2 =$$

$$= 3.52. \text{ Επομένως, } E[Y] = E[X^2 - \frac{3}{2}X] =$$

$$= E[X^2] - \frac{3}{2}E[X] = 3.52 - 1.5 \cdot 1.6 = 1.12 < E[X]$$

Άρα η στρατηγική (α) είναι πιο συμφέρουσα.

$$2. \text{ Θα είναι } E[X] > E[Y] \Rightarrow np > np(1-p) + (np)^2 - \frac{3}{2}np \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-n)p^2 + \frac{3}{2}np > 0 \Rightarrow p(p - \frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < p < \frac{1}{2}}$$

σε αυτήν την περίπτωση, η στρατηγική (α) είναι πιο συμφέρουσα από την (β).