

4ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Γ. Καφεντζής

13 Νοεμβρίου 2013

Άσκηση 0.1

Το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 τίμιων κερμάτων. Συμβολίζουμε με Y τον αριθμό που μας λέει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή Y και να βρεθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες, δηλαδή να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y .

Λύση:

Έστω τα γεγονότα $H = \{\text{έρχεται κορώνα}\}$ και $T = \{\text{έρχεται γράνα}\}$.

Η τ.μ. Y λαμβάνει τιμές $y = 0, 1, 2, 3$ (προφανώς). Άρα:

$$P(Y=0) = P_Y(0) = P(T, T, T) = \frac{1}{8}$$

$$P(Y=1) = P_Y(1) = P(\{T, T, H\}, \{T, H, T\}, \{H, T, T\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(Y=2) = P_Y(2) = P(\{T, H, H\}, \{H, T, H\}, \{H, H, T\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(Y=3) = P_Y(3) = P(H, H, H) = \frac{1}{8}$$

Άρα

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & y = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, & y = 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\sum P_Y(y) = 1$, που σημαίνει ότι η $P_Y(y)$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

Ασκηση 0.2

Τρεις μπάλες επιλέγονται τυχαία χωρίς επανατοποθέτηση από ένα δοχείο το οποίο περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το ένα έως και το είκοσι. Ορίζουμε τη τ.μ. X ως τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που έχουν επιλεγθεί.

(α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X ; Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Αν στοιχηματίσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις 3 μπάλες θα φέρει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

Λύση:

α) Προφανώς, η X παίρνει τιμές $3, 4, 5, \dots, 20$. Δεν μπορεί να πάρει τιμές 1 και 2 , γιατί δεν υπάρχουν 2 μπάλες με μικρότερο αριθμό στις περιπτώσεις αυτές. (Δεδομένου ότι δεν έχουμε επανάθεση). Μπορούμε να διαλέξουμε 3 από 20 μπάλες με $\binom{20}{3}$ τρόπους. Έστω x η τιμή της, μεγαλύτερης από τις 3, μπάλας. Οι άλλες δυο μπάλες μπορούν να επιλεγούν με $\binom{x-1}{2}$ τρόπους. Άρα, η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(x) = P(X=x) = \frac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \quad x=3, 4, \dots, 20. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με } P(X \geq 17) &= \\ &= \sum_{x=17}^{20} P_X(x) = P_X(17) + P_X(18) + P_X(19) + P_X(20) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} 0.105 + 0.119 + 0.134 + 0.15 = 0.508. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Εναλλακτικά, } P(X \geq 17) &= 1 - P(X < 17) = 1 - P(X \leq 16) = \\ &= 1 - \sum_{x=3}^{16} P_X(x), \text{ αλλά προφανώς δίνει πολύ περισσότερες} \\ &\text{πράξεις!} \quad \therefore \end{aligned}$$

Άσκηση 0.3

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας τ.μ. X δίδεται από τη σχέση:

$$p_X(k) = c \frac{\lambda^k}{k!}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

όπου λ είναι κάποιος θετικός αριθμός. Να υπολογιστούν:

(α) Η σταθερά c .

(β) $P(X = 0)$.

(γ) $P(X > 2)$.

Λύση:

α) Για να βρούμε τη σταθερά, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_X(k) = 1$$

$$\text{Άρα } \sum_{k=0}^{+\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} c \frac{\lambda^k}{k!} = c \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1. \quad (1)$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \quad (2)$$

$$\text{Άρα } (1) \stackrel{(2)}{\implies} c e^\lambda = 1 \iff c = \frac{1}{e^\lambda} = e^{-\lambda}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } P(X=0) = p_X(0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } P(X > 2) = \sum_{k=3}^{+\infty} p_X(k) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ που είναι}$$

αρκετὰ δύσκολο να υπολογιστεί.

$$\text{Όμως, } P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}.$$

Ασκηση 0.4

Θεωρείστε το λεγόμενο συμμετρικό δυαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι που περιγράφεται από τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{00} = p_{11} = 1 - p = 0.8$$

$$p_{01} = p_{10} = p = 0.2,$$

όπου p_{ij} ($i, j = 1, 2$) είναι η δεσμευμένη πιθανότητα λήψης του συμβόλου i δεδομένου ότι έχει σταλεί το σύμβολο j . Η είσοδος στο κανάλι αποτελείται από μία ακολουθία συμβόλων 0 και 1, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Έστω R η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των σφαλμάτων κατά τη μετάδοση 5 λέξεων που αποτελούνται από 8 σύμβολα η κάθε μία.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της R ·

(β) Ποια είναι η πιθανότητα σωστής μετάδοσης τουλάχιστον 38 συμβόλων·

(γ) Έστω $p = 5 \times 10^{-8}$ και υποθέστε ότι μεταδίδονται 10^6 σύμβολα το δευτερόλεπτο. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ενός σφάλματος μετάδοσης το ... λεπτο;

Λύση:

α) Εξετάζοντας το κανάλι, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα λάθους μετάδοσης είναι $p = 0.2$, ανεξάρτητα αν το σύμβολο είναι 0 ή 1. Άρα, η R είναι Διωνυμική τ.φ. με παραμέτρους $p = 0.2$ και $n = 5 \cdot 8 = 40$.

$$\text{Άρα } P_R(r) = \binom{40}{r} p^r (1-p)^{40-r}.$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι } P(\{\text{τουλάχιστον 38 σωστά σύμβολα}\}) &= \\ &= P(\{\text{το πολύ 2 λάθος μεταδόσεις}\}) = \\ &= P(R=2 \cup R=1 \cup R=0) = P(R=2) + P(R=1) + P(R=0) = \\ &= P_R(2) + P_R(1) + P_R(0) = \binom{40}{2} (0.2)^2 (0.8)^{38} + \binom{40}{1} 0.2 (0.8)^{39} + \\ &+ \binom{40}{0} (0.8)^{40} = 0.06794. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Σε ένα λεπτό, έχουμε μετάδοση } 6 \cdot 10^7 \text{ συμβόλων. Είναι:} \\ P(\text{τουλάχιστον ένα λάθος}) &= 1 - P(\text{κανένα λάθος}) = \\ &= 1 - \binom{6 \cdot 10^7}{0} p^0 (1-p)^{6 \cdot 10^7} = 1 - \binom{6 \cdot 10^7}{0} (1 - 5 \cdot 10^{-8})^{6 \cdot 10^7} = \\ &= 0.95022. \end{aligned}$$

Ασκηση 0.5

Θεωρείστε την διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (ς.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά a και τη μέση τιμή $E[X]$.

(β) Υπολογίστε τη ς.π. της τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (β), υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X .

Λύση:

α) Γνωρίζουμε ότι πρέπει $\sum p_X(x) = 1$ για να είναι η $p_X(x)$ έγκυρη κατανομή.

$$\text{Άρα } \sum_{x=-3}^3 p_X(x) = \frac{9}{a} + \frac{4}{a} + \frac{1}{a} + 0 + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{9}{a} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 28. \text{ Άρα } p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{28}, & x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

$$\text{Επίσης, } E[X] = \sum_{x=-3}^3 x p_X(x) =$$

$$= -3 \cdot \frac{9}{28} - 2 \cdot \frac{4}{28} - 1 \cdot \frac{1}{28} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{28} + 2 \cdot \frac{4}{28} + 3 \cdot \frac{9}{28} =$$

$$= 0 \Leftrightarrow E[X] = 0.$$

β) Ξχαίμε ότι $Z = (X - E[X])^2 = (X - 0)^2 = X^2$.

Η Z λοιπόν μπορεί να πάρει τις τιμές $z = 0, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2$.

Άρα $z = 0, 1, 4, 9$. Οπότε,

$$p_Z(z) = P(Z=z) = P(X^2=z), \text{ με } z = 0, 1, 4, 9.$$

$$\bullet p_Z(0) = P(Z=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = p_X(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet p_Z(1) &= P(Z=1) = P(X^2=1) = P(X^2-1=0) = \\ &= P(X=1 \cup X=-1) \stackrel{\text{Γέννα}}{=} P(X=1) + P(X=-1) = \\ &= \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

- $p_Z(4) = P(Z=4) = P(X^2=4) = P(X^2-4=0) =$
 $= P(X=2 \cup X=-2) \stackrel{\text{Σείρα}}{=} P(X=2) + P(X=-2) =$
 $= \frac{4}{28} + \frac{4}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$

- $p_Z(9) = P(Z=9) = P(X^2=9) = P(X=3 \cup X=-3) \stackrel{\text{Σείρα}}{=} P(X=3) + P(X=-3) =$
 $= \frac{9}{28} + \frac{9}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}.$

Άρα συνοψίζοντας, $p_Z(z) = \begin{cases} 1/14, & z=1 \\ 2/7, & z=4 \\ 9/14, & z=9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

γ) Ζητείται το $\text{var}(X)$, που εφόσον είναι ίσο με $\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] = E[Z] =$
 $= \sum_z z p_Z(z) = 1 \cdot \frac{1}{14} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{9}{14} =$
 $= 7 \iff \boxed{\text{var}(X) = 7}$