

1. Συνδυαστική Ανάλυση

- 1.1 Ένα κουτί περιέχει 8 κόκκινες, 3 άσπρες και 9 μπλε σφαίρες. Εάν βγάλουμε 3 σφαίρες στην τύχη χωρίς επανατοποθέτηση, ποια είναι η πιθανότητα (α) να είναι και οι 3 κόκκινες, (β) και οι 3 άσπρες, (γ) 2 κόκκινες και 1 άσπρη, (δ) τουλάχιστον 1 άσπρη, (ε) μία από κάθε χρώμα, (στ) να βγουν στη σειρά κόκκινη, άσπρη, μπλε;

Λύση

(α)

Πρώτη Μέθοδος

Συμβολίζουμε με K_1 , K_2 , K_3 τα γεγονότα «κόκκινη σφαίρα στο πρώτο τράβηγμα», «κόκκινη σφαίρα στο δεύτερο τράβηγμα» και «κόκκινη σφαίρα στο τρίτο τράβηγμα», αντίστοιχα. Το γεγονός «βγήκαν τρεις κόκκινες σφαίρες» είναι $K_1 \cap K_2 \cap K_3$ και η πιθανότητα του

$$P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = P(K_1)P(K_2|K_1)P(K_3|K_1 \cap K_2) = \frac{8}{20} \frac{7}{19} \frac{6}{18} = \frac{14}{285}$$

Δεύτερη Μέθοδος

$$\text{Ζητούμενη πιθανότητα} = \frac{\text{πλήθος εκλογών 3 σφαιρών από 8 κόκκινες}}{\text{πλήθος εκλογών 3 σφαιρών από 20 συνολικά}} = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{14}{285}$$

(β) Με τη δεύτερη μέθοδο του (α) έχουμε

$$P(\text{και οι 3 άσπρες}) = \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{1}{1140}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και 1^η μέθοδος του (α).

$$\begin{aligned} \text{(γ)} \quad P(2 \text{ κόκκινες και } 1 \text{ άσπρη}) &= \\ &= \frac{(\text{πλήθος εκλογών 2 από 8 κόκκινες})(\text{πλήθος εκλογών 1 από 3 άσπρες})}{(\text{πλήθος εκλογών 3 από 20})} \\ &= \frac{{}_8C_2 {}_3C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{7}{95} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(δ)} \quad P(\text{καμία άσπρη}) &= \frac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{34}{57} \quad \text{και άρα} \\ P(\text{τουλάχιστον 1 άσπρη}) &= 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57} \end{aligned}$$

$$\text{(ε)} \quad P(1 \text{ από κάθε χρώμα}) = \frac{{}_8C_1 {}_3C_1 {}_9C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{18}{95}$$

$$(\sigma) \quad P(\text{κόκκινη, άσπρη, μπλέ στη σειρά}) = \frac{1}{3!} P(1 \text{ από κάθε χρώμα}) = \frac{3}{95}$$

Άλλη μέθοδος

$$P(K_1 \cap A_2 \cap M_3) = P(K_1)P(A_2|K_1)P(M_3|K_1 \cap A_2) = \frac{8}{20} \frac{3}{19} \frac{9}{18} = \frac{3}{95}$$

- 1.2 Δύο παίκτες, ο Α και ο Β, παίζουν σκάκι 12 φορές που τελειώνουν με 6 νίκες του Α, 4 νίκες του Β και 2 ισοπαλίες. Εάν παίξουν 3 παιχνίδια, ποια είναι η πιθανότητα (α) να κερδίσει ο Α και τα 3, (β) να λήξουν ισοπαλία 2 παιχνίδια, (γ) να κερδίσουν τα παιχνίδια εναλλάξ, (δ) να κερδίσει ο Β τουλάχιστον 1 παιχνίδι;**

Λύση

Συμβολίζουμε με A_1, A_2, A_3 τα γεγονότα να κερδίσει ο Α το 1^ο, το 2^ο και το 3^ο παιχνίδι αντίστοιχα και με B_1, B_2, B_3 να κερδίσει ο Β το 1^ο, το 2^ο και το 3^ο παιχνίδι αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα προηγούμενα αποτελέσματα δεχόμαστε ότι (εμπειρική πιθανότητα):

$$P(\text{o A κερδίζει ένα ορισμένο παιχνίδι}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$

$$P(\text{o B κερδίζει ένα ορισμένο παιχνίδι}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$(α) P(\text{o A κερδίζει 3 παιχνίδια}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$$

δεχόμενοι ότι το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού είναι ανεξάρτητο των προηγούμενων αποτελεσμάτων.

- (β) Σε κάθε παιχνίδι η πιθανότητα μη ισοπαλίας είναι $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ και άρα η πιθανότητα ισοπαλίας είναι $p = 1 - q = \frac{1}{6}$. Επίσης έχουμε ότι εάν p η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός και $q=1-p$ η πιθανότητα να μη συμβεί, τότε η πιθανότητα να πάρουμε x φορές το γεγονός σε n ανεξάρτητες προσπάθειες είναι ${}_nC_x p^x q^{n-x}$. Άρα

$$P(2 \text{ ισοπαλίες}) = {}_3C_2 p^2 q^{3-2} = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(\text{o A και o B κερδίζουν εναλλάξ}) &= \\ P(\text{κερδίζουν στη σειρά o A, μετά o B και μετά o A} \\ \text{ή κερδίζουν στη σειρά o B, μετά o A και μετά o B}) &= \\ = P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) &= P(A_1)P(B_2)P(A_3) + P(B_1)P(A_2)P(B_3) \\ = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (δ) P(\text{o B κερδίζει τουλάχιστον 1 παιχνίδι}) &= 1 - P(\text{o B κερδίζει 0 παιχνίδια}) \\ &= 1 - P(B'_1 \cap B'_2 \cap B'_3) \\ &= 1 - P(B'_1)P(B'_2)P(B'_3) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

1.3 Μια γραμματέας βάζει στην τύχη n διαφορετικά γράμματα σε n φακέλους με διαφορετικές διευθύνσεις. Ποια είναι η πιθανότητα να πάει ένα τουλάχιστον γράμμα στο σωστό παραλήπτη;

Λύση

Συμβολίζουμε με $A_1, A_2, \dots, A_n$ τα γεγονότα να έχει μπει το 1° , το 2° , ..., το n -οστό γράμμα στο σωστό φάκελο. Το γεγονός «τουλάχιστον 1 γράμμα στο σωστό φάκελο» είναι $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ και άρα ζητάμε την $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Γενικεύοντας το θεώρημα ολικών πιθανοτήτων έχουμε

$$(1) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum P(A_k) - \sum P(A_j \cap A_k) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Όπου $\sum P(A_k)$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των A_k από 1 έως n , $\sum P(A_j \cap A_k)$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των $A_j \cap A_k$ με j και k από 1 έως n και $k > j$, κτλ. Έτσι έχουμε

$$(2) \quad P(A_1) = \frac{1}{n} \text{ και γενικά } P(A_k) = \frac{1}{n}$$

επειδή από τους n φακέλους μόνο ένας έχει τη σωστή διεύθυνση. Ακόμα

$$(3) \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

επειδή εάν το πρώτο γράμμα είναι στο σωστό φάκελο, τότε μόνο ένας από τους υπόλοιπους $n-1$ φακέλους είναι ο σωστός. Ομοίως

$$(4) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right)$$

κτλ, και τελικά

$$(5) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) \dots \left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n!}$$

Στο άθροισμα $\sum P(A_j \cap A_k)$ υπάρχουν ${}_nC_2$ όροι με την τιμή που δίνεται από τη σχέση (3). Ομοίως, στο $\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ υπάρχουν ${}_nC_3$ όροι με την τιμή που δίνεται από την (4) κ.ο.κ. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= {}_nC_1 \left(\frac{1}{n}\right) - {}_nC_2 \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) + {}_nC_3 \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} {}_nC_n \left(\frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Επίσης ξέρουμε ότι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Για $x=-1$ έχουμε

$$e^{-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots\right) \text{ ή } 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots = 1 - e^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλο n η πιθανότητα είναι περίπου $1 - e^{-1} = 0.6321$. Άρα είναι αρκετά πιθανό να φθάσει ένα γράμμα στο σωστό παραλήπτη. Το αξιοσημείωτο στο αποτέλεσμα αυτό είναι ότι η πιθανότητα μένει πρακτικά σταθερή για $n > 10$. Με άλλα λόγια η πιθανότητα να φθάσει τουλάχιστον ένα γράμμα στο σωστό παραλήπτη είναι πρακτικά η ίδια για n ίσο με 10 ή 10000.

2. Διακριτές Τ.Μ.

2.1 Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει το άθροισμα των αποτελεσμάτων στη ρίψη 2 ζαριών. (α) προσδιορίστε την κατανομή πιθανότητας της X . (β) Παραστήστε γραφικά αυτή την κατανομή πιθανότητας με ένα ιστόγραμμα.

Λύση

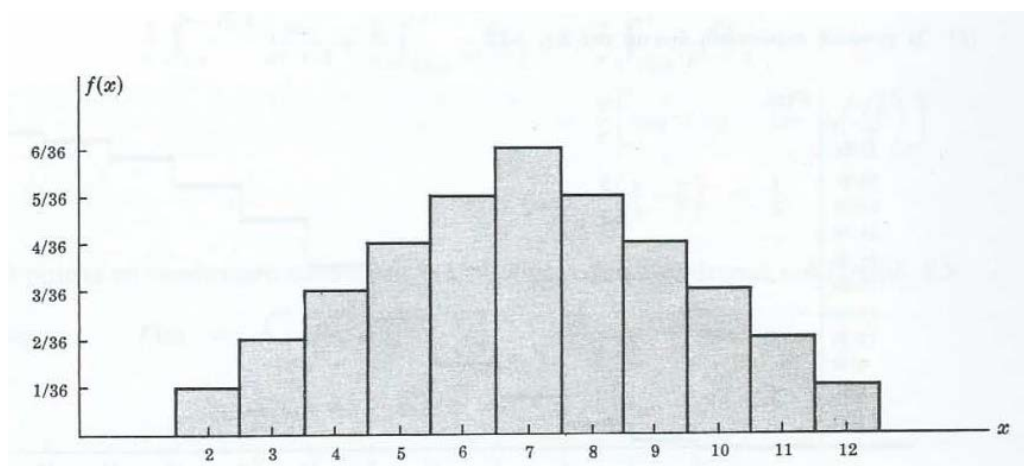
(α) Τα σημεία του δειγματοχώρου για τη ρίψη 2 ζαριών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

δεύτερο ζάρι	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
		1	2	3	4	5	6
		πρώτο ζάρι					

Η τυχαία μεταβλητή X είναι το άθροισμα των συντεταγμένων κάθε σημείου. Έτσι π.χ. για το (3,2) έχουμε $X=5$. Επειδή όλα τα 36 σημεία έχουν την ίδια πιθανότητα, κάθε σημείο έχει πιθανότητα $1/36$. Εύκολα καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα. Π.χ. για $X=5$ έχουμε τα 4 σημεία (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) και συνεπώς η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $4/36$.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

(β) Το ιστόγραμμα το οποίο αναπαρηστά την κατανομή πιθανότητας φαίνεται στο παρακάτω γράφημα



2.2 Το ένα δέκατο των εργαλείων που κατασκευάζει μια εταιρεία είναι ελαττωματικά. Υπολογίστε την πιθανότητα σε ένα τυχαίο δείγμα 10 εργαλείων να βγουν 2 ακριβώς εργαλεία ελαττωματικά (α) χρησιμοποιώντας τη διωνυμική κατανομή, (β) προσεγγίζοντας τη διωνυμική κατανομή με μια κατανομή Poisson.

Λύση

(α) Η πιθανότητα ελαττωματικού εργαλείου είναι $p=0.1$. Εάν η X παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών εργαλείων σε δείγμα 10 εργαλείων, τότε η διωνυμική κατανομή δίνει

$$P(X = 2) = {}_{10}C_2(0.1)^2(0.9)^8 = 0.1937 \quad \text{ή} \quad \cong 0.19$$

(β) Η κατανομή Poisson που προσεγγίζει τη διωνυμική αυτή κατανομή έχει $\lambda = np = (10)(0.1) = 1$. Άρα

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{ή} \quad P(X = 2) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = 0.1839 \quad \text{ή} \quad \cong 0.18.$$

Γενικά η προσέγγιση είναι καλή εάν $p \leq 0.1$ και $\lambda = np \leq 5$.

2.3 Η πιθανότητα να αντιδράσει άσχημα ένας ασθενής σε μια ένεση είναι 0.001. Εάν η ένεση γίνει σε 2000 ασθενείς, υπολογίστε την πιθανότητα να αντιδράσουν άσχημα (α) ακριβώς 3, (β) περισσότεροι από 2 ασθενείς.

Λύση

Έστω ότι η X παριστάνει το πλήθος των ασθενών που θα αντιδράσουν άσχημα. Η X έχει διωνυμική κατανομή, αλλά, επειδή η «άσχημη αντίδραση» είναι σπάνιο γεγονός, μπορούμε να δεχθούμε ότι έχει κατανομή Poisson, οπότε

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{ όπου } \lambda = np = (2000)(0.001) = 2.$$

$$(α) P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$$

$$\begin{aligned} (β) P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \right] \\ &= 1 - 5e^{-2} = 0.323 \end{aligned}$$

Ένας ακριβής υπολογισμός με τη διωνυμική κατανομή έχει πολύ περισσότερη δουλειά.