

3ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Γ. Καφεντζής

30 Οκτωβρίου 2013

Άσκηση 0.1

Έχουμε 3 κέρματα. Το ένα από αυτά έχει κορώνα και στις δύο πλευρές, το άλλο έχει γράμματα και στις δύο πλευρές, και το τελευταίο έχει κορώνα στην μια και γράμματα στην άλλη πλευρά. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, το ρίχνουμε και έρχεται κορώνα. Ποιά είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι γράμματα;

Λύση: Έστω τα τρία κέρματα ,
1 : (κ, κ)
2 : (κ, γ)
3 : (γ, γ)

Έστω $A = \{ \text{η πίσω πλευρά είναι γράμματα} \}$

$B = \{ \text{η πλευρά που ήρθε είναι κορώνα} \}$

$C_i = \{ \text{επέλεξα να ρίξω το i-οστό κέρμα} \}$

$$P(C_i) = \frac{1}{3}$$

Ζητείται το $P(A|B) = ?$ Προφανώς $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ①
από τον κανόνα της δεσφειμένης πιθανότητας.

Ας βρούμε το $P(B) = P(\{ \text{η πλευρά που ήρθε ήταν κορώνα} \}) =$

$$= P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) + P(C_3)P(B|C_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \text{ λόγω του θεωρήματος}$$

της Ολικής Πιθανότητας. Άρα $P(B) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Τέλος, } P(A \cap B) = P(\{ \text{η πλευρά που ήρθε ήταν Κ} \} \cap \{ \text{η πίσω} \\ \text{πλευρά είναι Γ} \}) = P(C_2) \cdot P(B|C_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα τελικά, } P(A|B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 0.2

Ο Χρήστος, η Σοφία, ο Ανδρέας, και η Μελίνα ρίχνουν (με αυτή τη σειρά) ένα κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $P(K) = p$, $0 < p < 1$. Ο πρώτος που θα φέρει κεφαλή, κερδίζει το παιχνίδι.

α. Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία κερδίζει κάθε παίκτης ($P(C)$, $P(S)$, $P(A)$, και $P(M)$), αντίστοιχα για τους Χρήστο, Σοφία, Ανδρέα, και Μελίνα).

β. Δείξτε ότι $P(C) > P(S) > P(A) > P(M)$. Πόσο χαρούμενη μπορεί να είναι η Μελίνα;

Λύση:

α) Αφά' $P(K) = p$, τότε $P(\Gamma) = 1 - p = q$. Η κάθε ρίψη κέρματος είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη. Ας πάρουμε πρώτα το Χρήστο.

Ο Χρήστος κερδίζει αν οι ακολουθίες ρίψεων είναι K ή $\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma K$ ή $\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma K$ ή ... , άρα η πιθανότητα νίκης του θα είναι

$$P(\text{ο Χρήστος κερδίζει}) = P(K) + P(\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma K) + P(\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma K) + \dots$$

$$= P(K) + P(\Gamma)^4 P(K) + P(\Gamma)^8 P(K) + \dots \quad (\text{λόγω ανεξαρτησίας})$$

$$= p + q^4 p + q^8 p + \dots = p(1 + q^4 + q^8 + \dots) =$$

$$= p \sum_{k=0}^{+\infty} (q^4)^k = p \frac{1}{1 - q^4}, \text{ επειδή } \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1 - a}, \text{ όταν } |a| < 1.$$

Όμοια για τους άλλους παίκτες, θα έχουμε:

$$P(\text{η Σοφία κερδίζει}) = p \frac{q}{1 - q^4}, \quad P(\text{ο Ανδρέας κερδίζει}) = p \frac{q^2}{1 - q^4}$$

$$\text{και } P(\text{η Μελίνα κερδίζει}) = p \frac{q^3}{1 - q^4}.$$

β) Αφά' $0 < q < 1$, έχουμε ότι

$$P(\text{Χρήστος}) > P(\text{Σοφία}) > P(\text{Ανδρέας}) > P(\text{Μελίνα})$$

που σημαίνει ότι η Μελίνα δεν πρέπει να είναι και πολύ χαρούμενη! ☹

(Παρατηρήστε επίσης ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων νίκης τα καθενός μας κάνει μονάδα)

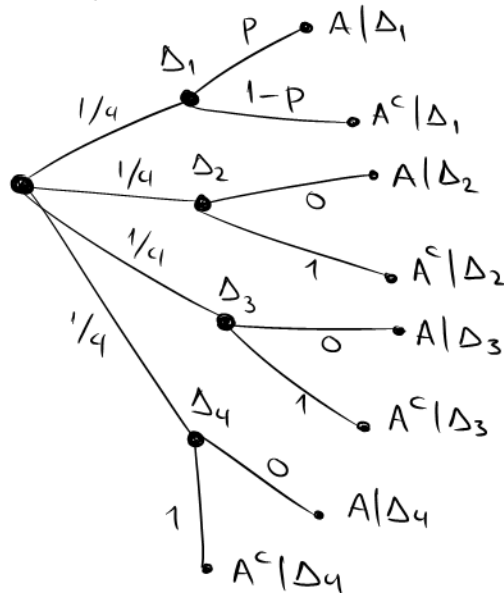
Άσκηση 0.3

Υποθέστε ότι ήσασταν αρκετά απερισκεπτοι ώστε να σώσετε την εργασία σας στο HY-150 μόνο σε μία δισκέτα, η οποία δυστυχώς κράσαρε. Ακόμα χειρότερα, την είχατε φυλάξει σε ένα συρτάρι με άλλες τρεις επίσης χαλασμένες δισκέτες. Πριν πάρετε τις 4 δισκέτες σε έναν ειδικό για να ανακτήσετε την εργασία σας, ένας φίλος σας προσφέρεται να ρίξει μία ματιά και να σας γλυτώσει από τα έξοδα. Επιλέγετε λοιπόν τυχαία μία δισκέτα και την παραδίδετε στον φίλο σας. Αν η εργασία σας βρίσκεται στη δισκέτα που δίνετε στο φίλο σας, αυτός θα την ανακτήσει με πιθανότητα p . Δεδομένου ότι ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να ανακτήσει την εργασία σας, ποια είναι η πιθανότητα ότι η εργασία σας βρίσκεται στην δισκέτα i , $i = 1, 2, 3, 4$;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{ \text{ψάχνει στη δισκέτα 1 και την ανακτά} \}$ και $\Delta_i = \{ \text{η εργασία βρίσκεται στη δισκέτα } i \}$. Ζητείται η πιθανότητα $P(\Delta_i | A^c) = ?$

Ας σχεδιάσουμε το δυαδικό δένδρο του προβλήματος:



Από τον κανόνα του Bayes, θα έχουμε:

$$P(\Delta_i | A^c) = \frac{P(\Delta_i)P(A^c | \Delta_i)}{P(A^c)}$$

$$\begin{aligned} \text{Ας βρούμε το } P(A^c) &= P(\Delta_1)P(A^c | \Delta_1) + P(\Delta_2)P(A^c | \Delta_2) + \\ &+ P(\Delta_3)P(A^c | \Delta_3) + P(\Delta_4)P(A^c | \Delta_4) \quad (\text{από θεωρ. Ολικής Πιθανότητας}) \\ &= \frac{1}{4}(1-p) + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \\ &= 4-p. \quad \text{Επίσης, προφανώς } P(\Delta_i) = \frac{1}{4}. \text{ Από το δυαδικό δένδρο,} \end{aligned}$$

$$P(A^c | \Delta_i) = \begin{cases} 1-p, & i=1 \\ 1, & i=2,3,4 \end{cases}, \quad \text{οπότε } P(\Delta_i | A^c) = \begin{cases} \frac{1-p}{4-p}, & i=1 \\ \frac{1}{4-p}, & i=2,3,4 \end{cases}$$

Άσκηση 0.4

Μία μαγνητική ταινία η οποία περιέχει πληροφορία σε ψηφιακή μορφή έχει αλλοιωθεί. Προσπαθείτε να ανακτήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα bits πληροφορίας. Προφανώς γνωρίζετε ότι αυτό που διαβάσετε πιθανώς είναι λάθος. Γνωρίζετε ότι αν υπήρχε ένα 0, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Επίσης, η πιθανότητα σωστής ανάγνωσης ενός 1 είναι 0.85. Κάθε βιτ στην ταινία είναι 0 ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Δεδομένου ότι διαβάσετε 1 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;

Λύση:

Από την εκφώνηση, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} P(\text{διαβάω } 0 \mid \text{είναι } 0) &= 0.9 \\ P(\text{—} \text{—} \text{—} 1 \mid \text{—} \text{—} \text{—} 1) &= 0.85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P(\text{διαβάω } 1 \mid \text{είναι } 0) &= 0.1 \\ P(\text{—} \text{—} \text{—} 0 \mid \text{—} \text{—} \text{—} 1) &= 0.15 \end{aligned}$$

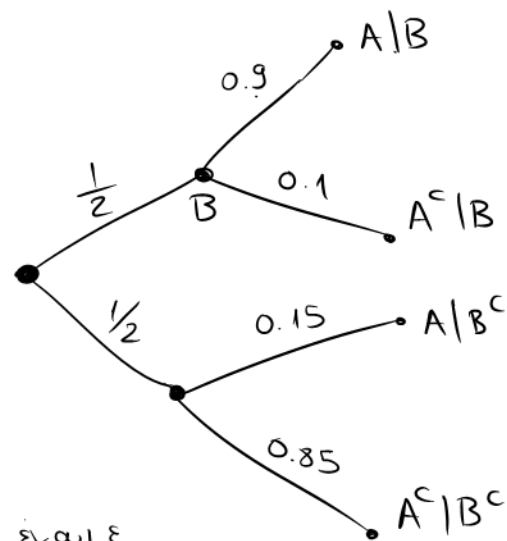
As σχεδιάσαμε το δένδρο:

Έστω $A = \{ \text{διαβάω } 0 \}$

$B = \{ \text{είναι } 0 \}$

Προφανώς, $A^c = \{ \text{διαβάω } 1 \}$

$B^c = \{ \text{είναι } 1 \}$



Ζητείται η $P(B^c | A^c)$.

Από τον κανόνα του Bayes, θα έχουμε

$$P(B^c | A^c) = \frac{P(B^c)P(A^c | B^c)}{P(A^c)} \quad \text{Από θεωρ. Ολικής Πιθανότητας,}$$

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } P(A^c) &= P(B)P(A^c | B) + P(B^c)P(A^c | B^c) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.85 = 0.475 \end{aligned}$$

Προφανώς, $P(B^c) = \frac{1}{2}$ και $P(A^c | B^c) = 0.85$, άρα τελικά

$$P(B^c | A^c) = P(\text{είναι } 1 \mid \text{διαβάω } 1) = \frac{0.85}{0.475} \approx 0.895$$

Ασκηση 0.5

Σε μία γραπτή εξέταση επιλογής ορθών απαντήσεων (multiple-choice test), ο φοιτητής είτε γνωρίζει την απάντηση είτε μαντεύει. Έστω p η πιθανότητα ότι ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση και $1 - p$ η πιθανότητα ότι ο φοιτητής μαντεύει. Υποθέτουμε ότι όταν ο φοιτητής μαντεύει, επιλέγει τη σωστή απάντηση με πιθανότητα $1/m$, όπου m είναι ο αριθμός των επιλογών για κάθε ερώτηση. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο φοιτητής γνώριζε την απάντηση σε μία ερώτηση, δεδομένου ότι απάντησε σωστά; Υπολογίστε την πιθανότητα όταν $m = 5$ και $p = 1/2$.

Λύση:

Έστω $\Gamma = \{ \text{ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση} \}$
και $A = \{ \text{απάντα σωστά} \}$. Προφανώς,

$\Gamma^c = \{ \text{ο φοιτητής δεν γνωρίζει την απάντηση} \}$
και $A^c = \{ \text{ο φοιτητής δεν απαντά σωστά} \}$.

Το Γ^c μπορεί να θεωρηθεί ως

$\Gamma^c = \{ \text{ο φοιτητής μαντεύει την απάντηση} \}$.

Είναι $P(\Gamma) = p$, $P(\Gamma^c) = 1 - p$ και

$P(A|\Gamma^c) = \frac{1}{m}$. Ζητείται το $P(\Gamma|A) = ?$

Από τον κανόνα του Bayes, έχουμε

$$P(\Gamma|A) = \frac{P(\Gamma)P(A|\Gamma)}{P(A)}, \text{ με } P(A) = (\text{θ.ολ.π.δ.})$$

$$= P(\Gamma)P(A|\Gamma) + P(\Gamma^c)P(A|\Gamma^c) = p \cdot 1 + \frac{1-p}{m} =$$

$$= \frac{mp + 1 - p}{m}. \text{ Προφανώς, } P(A|\Gamma) = 1, \text{ και άρα}$$

$$P(\Gamma|A) = \frac{mp}{(m-1)p + 1} \quad \text{Για } m=5, p=\frac{1}{2},$$

$$P(\Gamma|A) = \frac{5}{6}.$$

Ασκηση 0.6

Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά! Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

(α) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διάλεγετε δύο κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μίας και μοναδικής ρίψης του κέρματος. Ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

(β) Δεδομένων των συνθηκών στο (α), και του ότι και τα δύο αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο είναι παλιά;

Λύση:

α) Έστω $A = \{\text{τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά}\}$
και $B_1 = \{\text{επιλέγω 2 παλιά}\}$, $B_2 = \{\text{επιλέγω 2 νέα}\}$.

Από εκφώνηση, $P(B_1) = P(B_2) = 0.5$.

Επίσης, τα νέα ελαττωματικά κομμάτια είναι 75.
και τα παλιά ελαττωματικά είναι 150. Άρα μπορώ
να διαλέξω δυο παλιά με $\binom{1000}{2}$ τρόπους, ενώ
δυο νέα με $\binom{1500}{2}$ τρόπους.

Από τα 150 παλιά ελαττωματικά, μπορώ να διαλέξω
δυο με $\binom{150}{2}$ τρόπους, ενώ από τα 75 νέα με
 $\binom{75}{2}$ τρόπους. Άρα $P(A|B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$ και
 $P(A|B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$. Οπότε:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \\ = \frac{1}{2} \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}.$$

β) Από κανόνα του Bayes, θα έχουμε:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{\frac{1}{2} \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}}.$$

Ασκηση 0.7

Το θησαυροφυλάκιο μιας τράπεζας έχει κλειδαριά με συνδυασμό που απαιτεί για να ανοίξει την εισαγωγή σε οποιαδήποτε σειρά 8 διαφορετικών ακέραιων αριθμών από το 1 μέχρι και το 90. Ειδικά η κλειδαριά αυτή επιτρέπει τη χρήση 10 διαφορετικών ακεραίων αριθμών, δηλαδή η κλειδαριά ανοίγει όταν εισάγονται οποιοιδήποτε 8 από τους 10 αριθμούς. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας διαρρήκτης θα μπει στο θησαυροφυλάκιο με την πρώτη προσπάθεια.

Λύση:

Προφανώς, μπορούμε να διαλέξουμε 8 αριθμούς από ένα σύνολο 90 αριθμών με $\binom{90}{8}$ τρόπους.

Το πλήθος των συνδυασμών 10 αριθμών ανά 8 δίνεται από $\binom{10}{8}$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p = \frac{\binom{10}{8}}{\binom{90}{8}} \approx 5.8 \cdot 10^{-10}.$$

Ασκηση 0.8

Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας οχημάτων επτά χαρακτήρων υπάρχουν αν στις δύο πρώτες θέσεις τοποθετηθούν γράμματα και στις υπόλοιπες πέντε θέσεις τοποθετηθούν αριθμοί. Επαναλάβετε για την περίπτωση που δεν επιτρέπεται η επανάληψη γράμματος ή αριθμού στην πινακίδα.

Λύση:

→ Με επανάληψη γραφμάτων ή αριθμών:

Γ Γ Α Α Α Α Α

Γ : # 14 (Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Μ, Ν, Ο, Π, Τ, Υ, Χ)

Α : # 10 (0, 1, ..., 9)

Συνολικά έχουμε $14 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
 $= 14^2 \cdot 10^5 = 19.600.000$ διαφορετικές πινακίδες.

→ Χωρίς επανάληψη:

Στη θέση του πρώτου γράμματος, πρέπει να τριάν ελα τα πιθανά γράμματα (14). Στη θέση του δεύτερου γράμματος, μόνο 13 (14 πήν του ενός που πήκε στην πρώτη θέση). Αντίστοιχα για τους αριθμούς. Άρα $14 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$
 $= 5.503.680$ διαφορετικές πινακίδες.

Αλλιώς,

$$P(14, 2) \cdot P(10, 5) = \frac{14!}{12!} \cdot \frac{10!}{5!} = 14 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

Ασκηση 0.9

Με πόσους τρόπους μπορούν 3 βιβλία φυσικής, 2 βιβλία μαθηματικών και 1 βιβλίο χημείας να τοποθετηθούν σε μία βιβλιοθήκη αν

(α) τα βιβλία τοποθετηθούν με οποιαδήποτε σειρά,

(β) τα βιβλία μαθηματικών πρέπει να είναι όλα μαζί και ομοίως τα βιβλία φυσικής,

(γ) τα βιβλία φυσικής πρέπει να είναι όλα μαζί αλλά τα υπόλοιπα βιβλία μπορούν να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε σειρά.

Λύση:

α) Επειδή μας ενδιαφέρει η διάταξη, τα βιβλία μπορούν να μναι σε μια οποιαδήποτε σειρά με $P(6,6) = \frac{6!}{0!} = 6! = 720$ τρόπους.

β) Αν δαίμε τα βιβλία φυσικής ως μια ομάδα και τα βιβλία των Μαθηματικών ως μια άλλη ομάδα, τότε αυτές οι 3 ομάδες (Φ,Μ,Χ) μπορούν να μναι σε μια σειρά με 6 τρόπους:

ΦΜΧ, ΜΦΧ, ΧΦΜ, ΧΜΦ, ΜΧΦ, ΦΧΜ.

Τα 3 βιβλία φυσικής μπορούν να μναι σε σειρά με $3!$ τρόπους, ενώ των Μαθηματικών με $2!$ τρόπους. Άρα συνολικά, με $6 \cdot 3! \cdot 2! = 72$ τρόπους.

γ) Τα βιβλία φυσικής πάνε μαζί με $3!$ τρόπους.

Τα άλλα, με $4!$ τρόπους. Άρα συνολικά, με $3! \cdot 4! = 144$ τρόπους.

Ασκηση 0.10

Έστω μία ομάδα 20 ανθρώπων. Αν καθένας από αυτούς χαιρετίσει όλους τους άλλους, πόσες χειραψίες θα γίνουν;

Λύση:

A' ΤΡΟΠΟΣ

Ο 1^{ος} χαιρετά τους άλλους 19, ο 2^{ος} χαιρετά 18 (τον πρώτο ήδη τον χαιρέτησε), ο 3^{ος} χαιρετά 17 (οι δύο πρώτοι τον έχουν ήδη χαιρέτήσει), κ.ο.κ.
Άρα $19 + 18 + 17 + \dots + 1 = 190$ χειραψίες.

B' ΤΡΟΠΟΣ

Έστω (A_i, A_j) , $i \neq j$ τα πιθανά ζεύγη ανθρώπων που δίνουν χειραψία. Προφανώς, $(A_i, A_j) = (A_j, A_i)$ γιατί και τα δύο σημαίνουν ότι ο A_i χαιρέτηθηκε με τον A_j . Άρα μας ενδιαφέρουν τα διαφορετικά σύνολα και όχι η διατάξη τους. Άρα θα γίνουν $\binom{20}{2}$ χειραψίες.

Ασκηση 0.11

Μία τάξη χορού έχει 22 μαθητές, 10 γυναίκες και 12 άντρες. Αν πάρουμε τυχαία 5 άντρες και 5 γυναίκες, πόσα διαφορετικά ζευγάρια μπορούν να σχηματιστούν;

Λύση:

Μπορούμε να πάρουμε 5 από 12 άνδρες με $\binom{12}{5}$ τρόπους. Αντίστοιχα, 5 από 10 γυναίκες με $\binom{10}{5}$ τρόπους. Άρα συνολικά $\binom{10}{5}\binom{12}{5}$ επιλογές.

Τώρα, έστω $A_1, \dots, A_5$ οι άνδρες και $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ οι γυναίκες.

Ο A_1 μπορεί να κάνει ζευγάρι με όλες, ο A_2 με όλες πλην της μιας που έκανε ζευγάρι ο A_1 , ο A_3 με όλες πλην δυο (αυτές των A_1, A_2) κ.ο.κ.

Άρα γίνονται ζευγάρια με $5!$ τρόπους.

Οπότε θα έχουμε τελικά $5! \binom{10}{5} \binom{12}{5}$

διαφορετικά ζεύγη.

Ασκηση 0.12

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι.

(α) Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του έχουν μαλώσει και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως.

(β) Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως.

Λύση:

α) Είτε δε θα διαλέξει κανέναν απ' τους δύο,
άρα $\binom{6}{5}$ επιλογές,
είτε θα διαλέξει μόνο του έναν, μαζί με
άλλους 4, άρα $\binom{6}{4} \binom{2}{1}$,
άρα συνολικά $\binom{6}{5} + \binom{6}{4} \binom{2}{1}$ τρόποι.

β) Είτε δε θα καλέσει κανέναν απ' τους δύο,
άρα $\binom{6}{5}$,
είτε και τους δύο, μαζί με άλλους 3,
άρα $\binom{6}{3}$, άρα συνολικά $\binom{6}{5} + \binom{6}{3}$ επιλογές.