

2ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Μ. Κουτσογιαννάκη

25 Οκτωβρίου 2013

Άσκηση 0.1

Από μια τράπουλα με 52 φύλλα, βγάζουμε διαδοχικά 3 φύλλα. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε το πρώτο φύλλο να είναι άσος, το δεύτερο να είναι ρήγας, και το τρίτο να είναι άσος.

ΛΥΣΗ

A: τραβάω άσο από την τράπουλα - πρώτο χέρι

B: τραβάω ρήγα από την τράπουλα - δεύτερο χέρι

Γ: τραβάω αέβο από την τράπουλα - τρίτο χέρι

Η πιθανότητα να βυθεί το γεγονός A είναι $P(A) = \frac{4}{52}$ διότι μια τράπουλα έχει 4 αέβους στα 52 φύλλα της.

Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το γεγονός B δεδομένου ότι έχει βυθεί το γεγονός A (τώρα το A θεωρείται βέβαιος γεγονός) είναι $P(B/A) = \frac{4}{51}$

51 $\rightarrow$ 51 φύλλα
επειδή
έχουμε ο αέβος

Η πιθανότητα να τραβήξω αέβο από την τράπουλα αφού έχω τραβήξει ρήγα και αέβο

$$P(\Gamma | BA) = \frac{3}{50}$$

Η πιθανότητα να βυθούν και τα 3 γεγονότα

$$P(AB\Gamma) = P(A) P(B/A) P(\Gamma | BA) =$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{3}{50}$$

Τρεις μηχανές Α,Β,Γ συμμετέχουν κατά 20%, 30% και 50% αντίστοιχα, στην παραγωγή ενός προϊόντος ενός εργοστασίου. Η μηχανή Α παράγει ελαττωματικά προϊόντα σε ποσοστό 2%, η μηχανή Β σε ποσοστό 4% και η μηχανή Γ σε ποσοστό 5%. Παίρνουμε τυχαία ένα προϊόν από την παραγωγή του εργοστασίου.

1. Ποιά η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;
2. Αν το προϊόν βρέθηκε ελαττωματικό, ποιά η πιθανότητα να προήλθε από το μηχάνημα B;

ΠΥΣΗ α) Εξω Ε το γεγονός να είναι
ελαττωμένο

Βάσει του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας:

$$P(E) = \sum_{k=1}^K P(E|A_k) P(A_k), \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K = \emptyset$$

$$\text{Apo } P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)$$

$P(E/A) = \text{η πιθανότητα να είναι εξοπλισμένο}$
 $\text{αν προέρχεται από την τμήση } A = 0,02$

$P(E|B) = \ll \ll \ll \ll$ and zu $\text{fixieren } B = \text{orange}$

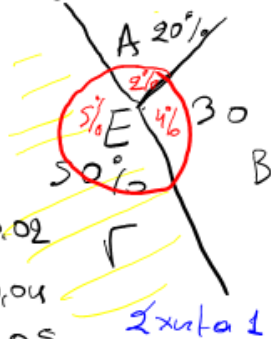
$P(E|T) = 0,05$

$$P(E) = 0,02 + 20\% + 904 \cdot 30\% + 0,0550\% = 0,041$$

β) Αν $6 \times 4 \times 10$ είναι παραλληλόγραμμο τότε $AB \cap \Gamma = \emptyset$ και

$$P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} =$$

$$= \frac{0,04 \cdot 0,04}{0,041} \stackrel{\text{Bayes}}{=} 0,039 = 3,9\%$$



Bayes)

Άσκηση 0.3

Το 80% των φοιτητών πηγαίνει απροετοίμαστο στις εξετάσεις. Από τους απροετοίμαστους φοιτητές, περνάει το 15%, ενώ από τους προετοιμασμένους φοιτητές περνάει το 90%.

1. Να βρεθεί το ποσοστό των φοιτητών που περνά τις εξετάσεις.
2. Αν ένας φοιτητής πέρασε τις εξετάσεις, ποιά η πιθανότητα να ήταν προετοιμασμένος;
3. Αν ένας φοιτητής δεν πέρασε τις εξετάσεις, ποιά η πιθανότητα να ήταν προετοιμασμένος;

ΛΥΣΗ:

A : απροετοίμαστο $P(A) = 0,8$,

$\bar{A}$: προετοιμασμένος $P(\bar{A}) = 1 - 0,8 = 0,2$

E : επιτυχής $P(E|A) = 0,15$

$P(E|\bar{A}) = 0,9$

$$\rightarrow P(\bar{E}|\bar{A}) = 1 - 0,9$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|A)P(A) + P(E|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= 0,15 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,3 \end{aligned}$$

$$i) P(\bar{A}|E) = \frac{P(E|\bar{A})P(\bar{A})}{P(E)} = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,3} = 0,6$$

ii)
Bayes:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|\bar{E}) &= \frac{P(\bar{E}|\bar{A})P(\bar{A})}{P(\bar{E})} = \frac{[1 - P(E|\bar{A})]P(\bar{A})}{P(\bar{E})} \\ &= \frac{[1 - 0,9] \cdot 0,2}{0,3} = 0,0667 \end{aligned}$$

Άσκηση 0.4

- Ο Κώστας και η Άννα έχουν από μια τραπουλα. Ο καθένας επιλέγει τυχαία ένα χαρτί από τη δική του τράπουλα.
 - Ποιά η πιθανότητα να είναι και τα δυο χαρτιά άσσοι;
 - Ποιά η πιθανότητα τουλάχιστον ένα χαρτι να είναι άσσος;
 - Ποιά η πιθανότητα κανένα χαρτι να είναι άσσος;
- Ο Κώστας και η Άννα μοιραζονται την ίδια τραπουλα. Ποιά η πιθανότητα να είναι και τα δυο χαρτιά άσσοι;
- Ο Κώστας και η Άννα συμφώνησαν ότι οποιος τραβήξει δευτερο ασσο από την ίδια τραπουλα, κερδίζει το παιχνίδι. Αν η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα είναι 0.9 και η πιθανότητα να φερθεί τίμια είναι 0.3, ποιά είναι η πιθανότητα ενώ τελικά κερδίζει το παιχνίδι να έκλεψε, δεδομένου ότι αν κλέψει έχει πιθανότητα 0.9 να κερδίσει;

ΛΥΣΗ:

A) α) $P(A_1) = \frac{4}{52}, P(A_2) = \frac{4}{52}, P(A_1, A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}$
 β) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1, A_2)$

γ) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \dots$ κανένα χαρτί άσσο

B) Ιδια τραπουλα : A_1 το γεγονός να τραβήξω πρώτο χαρτί άσο.
 $P(A_1) = \frac{4}{52}$. Η πιθανότητα να τραβήξω άσο δεδομένου ότι έχω τραβήξει άσο είναι $P(A_2/A_1) = \frac{3}{51}$. Απ. πιθανότητα να βωβω και τα 2 γεγονότα σταδονικά είναι $P(A_1, A_2) = P(A_2/A_1)P(A_1)$.
 Αν η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα το παιχνίδι είναι 0.9 και η πιθανότητα να φερθεί τίμια είναι 0.3, ποιά είναι η πιθανότητα ενώ τελικά κερδίζει το παιχνίδι να έκλεψε, δεδομένου ότι αν κλέψει έχει πιθανότητα να κερδίσει 0.9;

Γ) Αν η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα το παιχνίδι είναι 0.9 και η πιθανότητα να φερθεί τίμια είναι 0.3, ποιά είναι η πιθανότητα ενώ τελικά κερδίζει το παιχνίδι να έκλεψε, δεδομένου ότι αν κλέψει έχει πιθανότητα να κερδίσει 0.9;

K: πιθανότητα να κερδίσει η Άννα $P(K) = 0.8$

T: γεγονός η Άννα θα φερθεί τίμια $P(T) = 0.3$

M: γεγονός η Άννα δε θα φερθεί τίμια $P(M) = 1 - P(T) = 0.7$

$P(K|M) = 0.9 \xrightarrow{\text{Bayes}} P(M|K) = \frac{P(K|M)P(M)}{P(K)}$

$P(M|K) = \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.8} = 0.7875$