

10ο Φροντιστήριο HY217 - Επαναληπτικό

Επιμέλεια: Γ. Καφεντζής

17 Ιανουαρίου 2014

Άσκηση 0.1 Το σήμα $s = 2$ μεταδίδεται από ένα δορυφόρο αλλά λόγω της επίδρασης του θορύβου το λαμβανόμενο σήμα έχει τη μορφή $X = s + W$. Όταν ο καιρός είναι καλός, γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $2/3$, η συνιστώσα του θορύβου, W , ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1, $W \sim N(0, 1)$. Όταν ο καιρός είναι κακός, η συνιστώσα του θορύβου, W , ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 9, $W \sim N(0, 9)$. Υπολογίστε τη συν.πυκν.πιθανότητας της τ.μ. X και την πιθανότητα η X να πάρει τιμές μεταξύ 1 και 3.

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνοντας ως διαμέριση του δειγματοχώρου τις καιρικές συνθήκες και εκφράστε την ζητούμενη πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 3)$ συναρτήσεων των τιμών $\Phi(1)$ και $\Phi(1/3)$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Λύση

(α) Έστω G το γεγονός 'ο καιρός είναι καλός'. Δίνεται ότι $P(G) = \frac{2}{3}$. Για να βρούμε την PDF της X , πρώτα βρίσκουμε την PDF της W , καθώς $X = s + W = 2 + W$. Ξέρουμε ότι αν ο καιρός είναι καλός, τότε $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ενώ αν ο καιρός είναι κακός $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$. Για να βρούμε την PDF της W χρησιμοποιούμε το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για συναρτήσεις πυκνότητας:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= P(G) \cdot f_{W|G}(w) + P(G^c) \cdot f_{W|G^c}(w) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2 \cdot 9}} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητών $X = 2 + W$ για να βρούμε την PDF της X :

$$f_X(x) = f_W(x - 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 9}}.$$

(β) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την PDF που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα

$$\int_1^3 f_X(x) dx.$$

Είναι όμως ευκολότερο να μεταφράσουμε το γεγονός $\{1 \leq X \leq 3\}$ χρησιμοποιώντας το W και μετά να εφαρμόσουμε το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας. Έχουμε ότι

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(1 \leq 2 + W \leq 3) = P(-1 \leq W \leq 1)$$

και από το Θ. Ολ. Πιθ.

$$P(-1 \leq W \leq 1) = P(G) \underbrace{P(-1 \leq W \leq 1|G)}_a + P(G^c) \underbrace{P(-1 \leq W \leq 1|G^c)}_b$$

Καθώς δεσμεύοντας είτε πάνω στη G ή στη G^c η τυχαία μεταβλητή W είναι Gaussian, οι δεσμευμένες πιθανότητες a και b μπορούν να εκφραστούν μέσω της συνάρτησης Φ . Δεσμεύοντας πάνω στη G έχουμε $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ οπότε

$$a = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1.$$

Δεσμεύοντας πάνω στη G^c έχουμε $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$ οπότε

$$b = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1.$$

Επομένως η τελική απάντηση είναι η:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{2}{3}(2\Phi(1) - 1) + \frac{1}{3}\left(2\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right).$$

Άσκηση 0.2 Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x) & \text{για } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της X και υπολογίστε τη σταθερά a .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$.

(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της X , $F_X(x)$.

Λύση

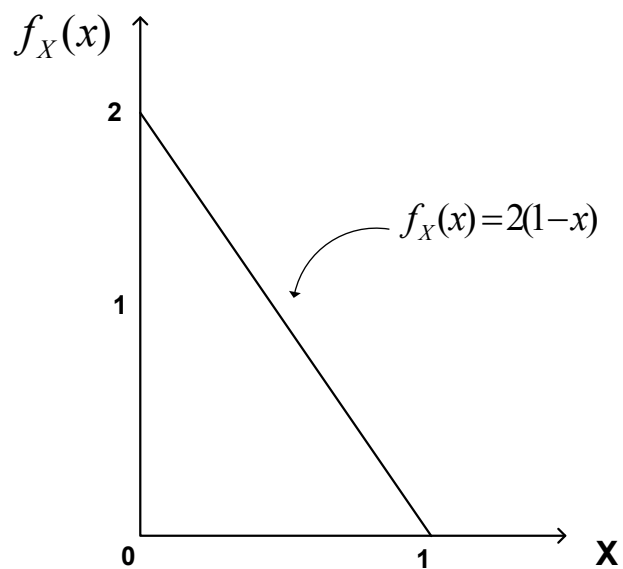
(α) Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 a(1-x)dx = 1 \Rightarrow \left(ax - \frac{a}{2}x^2\right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow a - \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

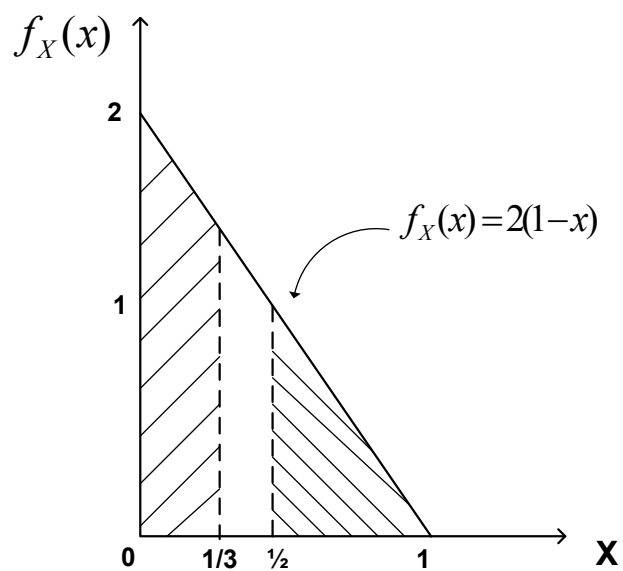
Εναλλακτικά, πρέπει η επιφάνεια του τριγώνου με βάση 1 και ύψος a να είναι ίση με $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 2$. Η γραφική παράσταση της PDF της X φαίνεται στο Σχήμα 1.

(β)

$$\begin{aligned} P(6X^2 > 5X - 1) &= P(6X^2 - 5X - 1 > 0) \\ &= P((3X - 1)(2X - 1) > 0) \\ &= P\left(X > \frac{1}{2}\right) + P\left(X < \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2(1-x)dx = \frac{29}{36} \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $\sigma.π.π.$ για την Άσκηση 2, υποερώτημα (α).



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $\sigma.π.π.$ για την Άσκηση 2, υποερώτημα (β).

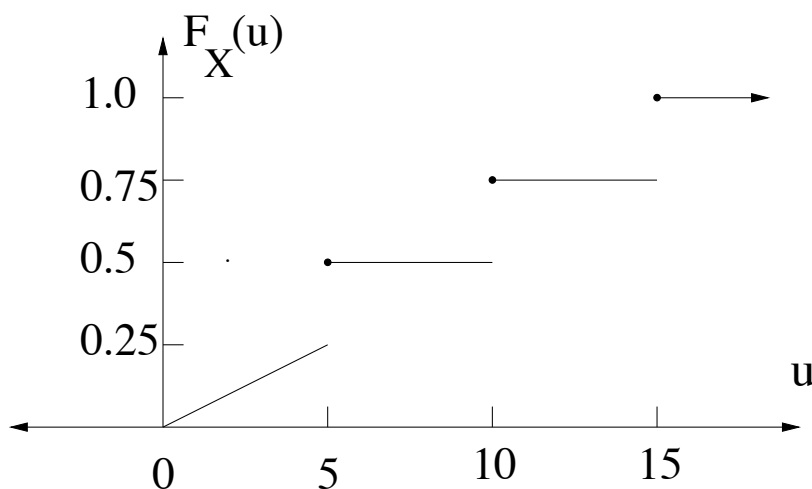
(γ)

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= 0 \text{ για } x < 0 \\
 F_X(x) &= \int_0^x 2(1-t)dt = 2t - t^2 \Big|_0^x = 2x - x^2 \text{ για } 0 \leq x \leq 1 \\
 F_X(x) &= 1 \text{ για } x > 1
 \end{aligned}$$

Τελικά :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 0.3 Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα (3).



Σχήμα 3: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X Άσκησης 3.

Υπολογίστε τα ακόλουθα :

(α) $P(X \leq 1)$.

(β) $P(X \leq 10)$.

(γ) $P(X > 10)$.

(δ) $P(X \geq 10)$.

(ε) $P(|X - 5| \leq 0.1)$.

(στ) Κατανομή, $f_X(x)$, της X . Τι είδους μεταβλητή είναι η X ;

(ζ) Μέση τιμή, $E[X]$.

Λύση

(α) $P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.05$

(β) $P(X \leq 10) = F_X(10) = 0.75$

(γ) $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0.75 = 0.25$

(δ) $P(X \geq 10) = P(X > 10) + P(X = 10) = 0.25 + 0.25 = 0.5$

(ε) $P(|X - 5| \leq 0.1) = P(4.9 \leq X \leq 5.1) = F_X(5.1) - F_X(4.9) = 0.255$

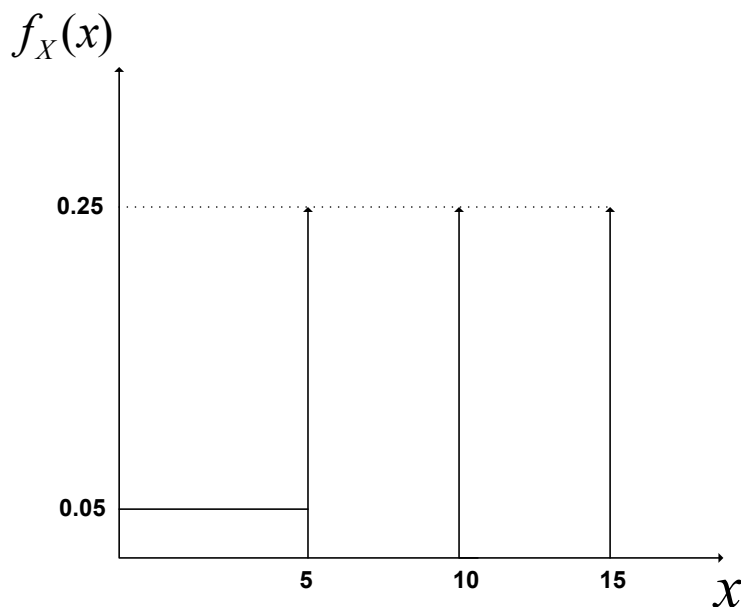
(στ) Παρατηρώντας τις ασυνέχειες στην $F_X(u)$, συμπεραίνουμε ότι η X είναι μικτή τ.μ. Παίρνει τις τιμές $X = 5, 10, 15$ με μη-μηδενικές πιθανότητες:

$$P(X = 5) = P(X = 10) = P(X = 15) = 0.25$$

Επίσης, καθώς $F_X(x) = \frac{x}{20}$ για $0 \leq x < 5$, παραγωγίζοντας παίρνω ότι

$$f_X(x) = \frac{1}{20}, \text{ για } 0 \leq x < 5$$

Η γραφική παράσταση της σ.π.π. της X φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της σ.π.π. για την Άσκηση 3.

$$\textcircled{G} E[X] = \int_0^5 \frac{1}{20} x dx + 0.25(5 + 10 + 15) = \frac{1}{20} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^5 + 0.25 \times 30 = 8.125$$

Άσκηση 0.4 Η τυχαία μεταβλητή X είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda_X = 1$, δηλαδή ορίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Δοθέντος ότι $X = x$, η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_Y = x$, δηλαδή η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_{Y|X}(y|x) = x e^{-xy}, \quad y \geq 0$$

Με A συμβολίζουμε το γεγονός $\{X \geq 2\}$.

(α) Υπολογίστε την δεσμευμένη συν. πυκν. πιθανότητας $f_{X|A}(x|A)$ και συγκρίνετε την με την περιθωριακή $f_X(x)$.

(β) Βρείτε την $f_{X,Y}(x,y)$, δηλ. την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X

και Y .

(γ) Βρείτε την $f_Y(y)$, δηλ. την περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y .

Λύση

Αφού η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$,

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Εστω A το γεγονός ότι $X \geq 2$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης συν.πυκν.πιθ.,

$$f_{X|A}(x|X \geq 2) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X \geq 2)}, & \text{αν } x \geq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρώτον, υπολογίζουμε την $P(X \in A)$. Ολοκληρώνοντας την συν. πυκν. πιθανότητας της X στο σύνολο A ,

$$\int_A f_X(x)dx = \int_2^\infty e^{-x}dx = -e^{-x} \Big|_2^\infty = -(0 - e^{-2}) = \frac{1}{e^2}$$

Κατά συνέπεια

$$f_{X|A}(x|X \geq 2) = \begin{cases} e^{2-x}, & \text{αν } x \geq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρά το ότι δεσμεύσαμε στο γεγονός $X > 2$ η συν. πυκν. πιθανότητας εξακολουθεί να είναι εκθετική με παράμετρο λ . Αυτό εξηγείται από την ιδιότητα αμνησίας της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούσαμε την κατανομή αυτή για να μοντελοποιήσουμε τον χρόνο που περνά μέχρι να συμβεί ένα γεγονός, ακόμα και αν περιμέναμε T χρονικές μονάδες, η πιθανότητα του να συμβεί το γεγονός εξακολουθεί να χει την ίδια κατανομή, δηλαδή δεν υπάρχει μνήμη για το αν συνέβη το γεγονός τις πρώτες T χρονικές στιγμές ή όχι.

(β) Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των x, y . Στην εκφώνηση αναφέρεται ότι δοθέντος $x = X$, Η Y είναι μια εκθετικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda_Y = x$. Έτσι,

$$f_{Y|X}(y|X = x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & \text{αν } x, y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των δεσμευμένων $PDFs$,

$$f_{Y|X}(y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

και άρα

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|X = x)f_X(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω $PDFs$ έχουμε

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{αν } x, y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Για να βρούμε την περιθωριακή PDF της Y , ολοκληρώνουμε την από κοινού PDF των X και Y πάνω σε όλα τα x . Έτσι,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_x f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^\infty x e^{-x(y+1)} dx \\ &= \left. \frac{-x}{y+1} e^{-x(y+1)} \right|_0^\infty + \frac{1}{y+1} \int_0^\infty e^{-x(y+1)} dx \\ &= \left. \frac{-1}{(y+1)^2} e^{-x(y+1)} \right|_0^\infty = \frac{1}{(y+1)^2} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά μέλη. Επομένως, η περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2}, & \text{αν } y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 0.5 Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{αν } 0 \leq y < x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εστω A το γεγονός $X \geq 1/2$ και B το γεγονός $Y < 1 - X$. Συνίσταται να χρησιμοποιείτε διαγράμματα για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Εξηγείστε.
- Υπολογίστε την τιμή του c .
- Υπολογίστε την $P(A)$.
- Υπολογίστε την $P(B)$.
- Υπολογίστε την $P(B|A)$.
- Υπολογίστε την $P(A|B)$.
- Υπολογίστε την $E[XY]$.

Λύση

- Ας κοιτάξουμε το παρακάτω για να ελέγξουμε την ανεξαρτησία.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^x c dy = cx, \text{ για } 0 \leq x \leq 2$$

Ομοίως

$$f_Y(y) = \int_y^2 c dx = c(2-y) \text{ για } 0 \leq y \leq 1$$

Προφανώς

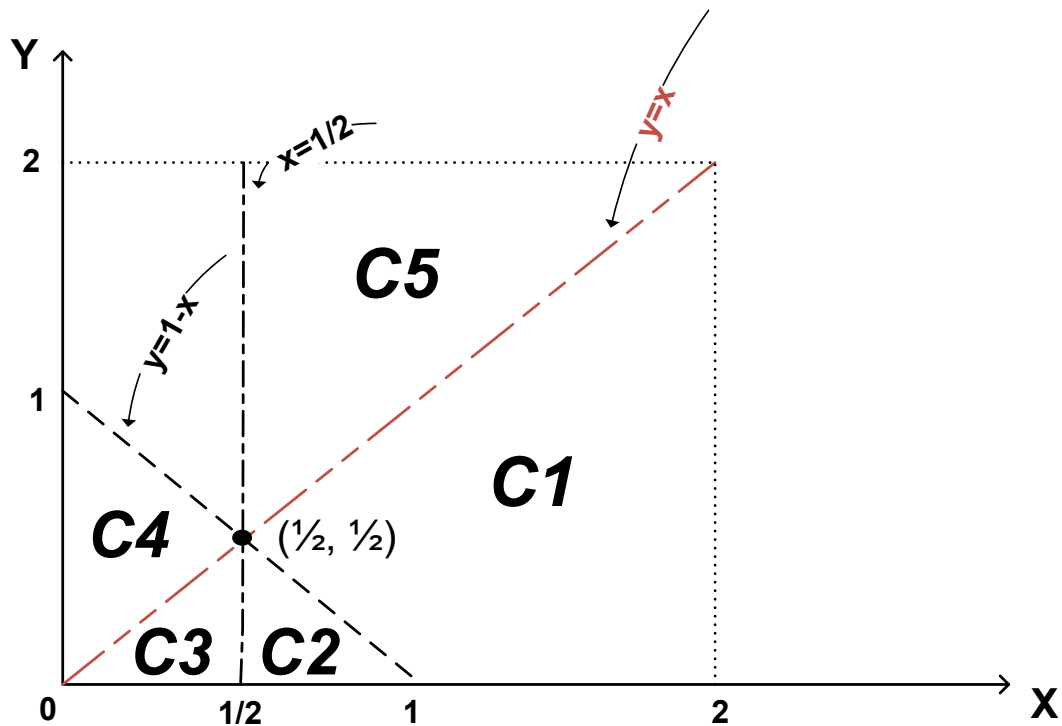
$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Επομένως, οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

- Ο όγκος κάτω από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, και στο χωρίο που ορίζουν οι (X, Y) (τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$), πρέπει να ισούται με 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = c \left(\frac{\text{βάση} \times \text{ύψος}}{2} \right) = c \times \frac{2 \times 2}{2} = 2c = 1$$

Αρα $c = 1/2$. Πρίν προχωρήσουμε στα επόμενα ερωτήματα, ας σχεδιάσουμε το διδιάστατο επίπεδο των τ.μ. X, Y . Από την εκφώνηση έχουμε ότι $0 \leq y < x \leq 2$, άρα σίγουρα θα μας χρειαστεί η ευθεία $y = x$ και επίσης η $x = 2$ (ως άνω όριο του χωρίου που ορίζεται η κατανομή). Επίσης, από τα ενδεχόμενα που ορίζονται στην εκφώνηση, θα πρέπει να σχεδιάσουμε την $y = 1 - x$, καθώς και την $x = 1/2$. Όλα αυτά μας χρειάζονται για να ορίσουμε τα χωρία που ικανοποιούν τις ανισότητες. Όλες αυτές οι ευθειες, καθώς και μερικά χρήσιμα χωρία, έχουν παρασταθεί στο Σχήμα (5).



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση της σ.π.π. για την Άσκηση 5.

- Έχοντας βρει στο πρώτο ερώτημα την περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$, και έχοντας $c = 1/2$, μπορούμε πολύ εύκολα να πούμε ότι

$$P(X \geq 1/2) = \int_{1/2}^2 f_X(x) dx = \int_{1/2}^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{1/2}^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Όμως ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα κατ' ευθείαν από την από κοινού κατανομή.

$$P(A) = P(X \geq 1/2) = P(X \geq 1/2, 0 \leq Y < X \leq 2)$$

Η περιοχή που ορίζεται από το $\{X \geq 1/2, 0 \leq Y < X \leq 2\}$ φαίνεται στο Σχήμα (5) ως η περιοχή που αποτελείται από τα χωρία $C1, C2$, δηλ. $C1 \cup C2$. Σε αυτήν την περιοχή, το X είναι πάντα μεγαλύτερο του $1/2$ (και προφανώς μικρότερο του 2 , από τον ορισμό), ενώ ταυτόχρονα το $Y < X$ (η περιοχή κάτω και δεξιά από την ευθεία $y = x$). Με περισσότερη λεπτομέρεια, το χωρίο που ικανοποιεί την $\{X \geq 1/2\}$ είναι αυτό που ορίζεται δεξιότερα της κατακόρυφης ευθείας $x = 1/2$, δηλ. περιλαμβάνει τα χωρία $C1, C2, C5$. Το χωρίο που ικανοποιεί την $\{0 \leq Y < X \leq 2\}$ είναι αυτό που ορίζεται κάτω από την ευθεία $y = x$, δηλ. περιλαμβάνει τα χωρία $C1, C2, C3$. Το χωρίο που ικανοποιεί την τομή των δυο παραπάνω γεγονότων είναι η τομή των χωρίων, δηλ. το $C1 \cup C2$. Άρα

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \geq 1/2) = P(X \geq 1/2, 0 \leq Y < X \leq 2) = \int_{1/2}^2 \int_0^x \frac{1}{2} dy dx \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{2} y \Big|_0^x dx = \int_{1/2}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{1/2}^2 \\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

- Ας βρούμε τώρα το χωρίο που ορίζεται από το γεγονός $B = \{Y < 1 - X\}$. Η ευθεία $y = 1 - x$ που έχουμε σχεδιάσει θα μας βοηθήσει. Τα χωρία $C2, C3, C4$ είναι αυτά που ικανοποιούν το γεγονός B , γιατί τα σημεία (X, Y) των χωρίων αυτών έχουν πάντα $Y < 1 - X$. Όμως από εκφώνηση έχουμε ότι $0 \leq Y < X \leq 2$. Άρα

$$\begin{aligned} P(B) &= P(Y < 1 - X) = P(0 \leq X \leq 1, Y < 1 - X) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} y \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1-x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι εδώ ΔΕΝ μπορούμε να δουλέψουμε μόνο με την $f_Y(y)$, όπως κάναμε με την $f_X(x)$ στο προηγούμενο ερώτημα, γιατί το ζητούμενο γεγονός εμπλέκει και τις δυο τ.μ.

- Έχουμε

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) = P(X \geq 1/2 \cap Y < 1 - X) / P(X \geq 1/2)$$

Όμως

$$P(X \geq 1/2) = \frac{15}{16}$$

από προηγούμενο ερώτημα. Στο Σχήμα (5), το γεγονός $\{A = \{X \geq 1/2\} \cap B = \{Y < 1 - X\}\}$ αντιστοιχεί στην τομή των χωρίων που ορίζουν τα A, B . Για το γεγονός A , είδαμε παραπάνω ότι το χωρίο που του αντιστοιχεί είναι το $C1 \cup C2$. Για το γεγονός B , είδαμε επίσης ότι αντιστοιχεί στο χωρίο $C2 \cup C3 \cup C4$. Άρα η τομή τους είναι το

χωρίο $C2$. Οπότε

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(X \geq 1/2 \cap Y < 1 - X) / P(X \geq 1/2) = \frac{16}{15} P(X \geq 1/2 \cap Y < 1 - X) \\ &= \frac{16}{15} \int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} dy dx = \frac{16}{15} \int_{1/2}^1 \frac{y}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{16}{15} \int_{1/2}^1 \frac{1-x}{2} dx \\ &= \frac{16}{15} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_{1/2}^1 = \frac{16}{15} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) = \frac{16}{15} \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

- Έχουμε

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = P(X \geq 1/2 \cap Y < 1 - X) / P(Y < 1 - X)$$

Όμως

$$P(Y < 1 - X) = \frac{1}{4}$$

από προηγούμενο ερώτημα. Παραπάνω βρήκαμε και την πιθανότητα $P(X \geq 1/2 \cap Y < 1 - X) = \frac{1}{16}$. Άρα εύκολα έχουμε

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = P(X \geq 1/2 \cap Y < 1 - X) / P(Y < 1 - X) = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4}$$

- Έχουμε

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_y^2 xy \frac{1}{2} dx dy = \int_0^2 \frac{1}{4} y (4 - y^2) dy = 1$$

Άσκηση 0.6 Η τυχαία μεταβλητή X είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda_X = 1$, δηλαδή ορίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

(α) Παράγετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $f_Z(z)$, όπου $Z = e^{3X}$

(β) Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{αν } 0 \leq y < x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να παραχθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $f_Z(z)$, όπου $Z = \frac{Y}{X}$.

Λύση (α) Η CDF της Z είναι:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(e^{3x} \leq z) = P(X \leq \frac{\ln z}{3}) \\ &= \int_0^{\frac{\ln z}{3}} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\ln z / 3} \\ &= 1 - e^{-\frac{\ln z}{3}} = 1 - z^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

και η PDF

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{3}z^{-\frac{4}{3}}, \text{ για } 0 \leq z < 1.$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Y/X \leq z) = P(Y \leq zX) \\ &= P(0 < X \leq 2, Y \leq zX) \\ &= \int_0^2 \int_0^{zx} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{zx} c dy dx \\ &= \int_0^2 czx dx \\ &= \left. \frac{czx^2}{2} \right|_0^2 \\ &= 2cz \end{aligned}$$

άρα

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = 2c$$

για $0 \leq z < 1$.

Άσκηση 0.7 Ένας ανθρακωρύχος είναι παγιδευμένος σε στοά από την οποία ξεκινούν τρεις σήραγγες. Η πρώτη από αυτές οδηγεί στην έξοδο μετά από 3 ώρες πορείας. Η δεύτερη οδηγεί πίσω στη στοά (και στο μέρος από το οποίο ο ανθρακωρύχος ξεκίνησε) μετά από 5 ώρες. Η τρίτη οδηγεί επίσης πίσω στη στοά μετά από 7 ώρες. Αν υποθέσουμε ότι ο ανθρακωρύχος επιλέγει τυχαία και ανεξάρτητα κάθε φορά μία από τις τρεις σήραγγες (δυστυχώς δεν θυμάται τίποτε σχετικά με το ποια σήραγγα επέλεξε την τελευταία φορά...), ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να βρει την έξοδο.

Χρησιμοποιείτε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής, ορίζοντας τις κατάλληλες τυχαίες μεταβλητές.

Λύση

Έστω ότι X δηλώνει την ποσότητα χρόνου (σε ώρες) έως ότου ο ανθρακωρύχος να φθάσει στην έξοδο. Επίσης, έστω ότι Y δηλώνει την σήραγγα που αρχικά επιλέγει. Είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X | Y = 1]P\{Y = 1\} + E[X | Y = 2]P\{Y = 2\} + E[X | Y = 3]P\{Y = 3\} \\ &= \frac{1}{3} (E[X | Y = 1] + E[X | Y = 2] + E[X | Y = 3]) \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} E[X | Y = 1] &= 3 \\ E[X | Y = 2] &= 5 + E[X] \\ E[X | Y = 3] &= 7 + E[X] \end{aligned} \tag{1}$$

Για να καταλάβετε γιατί το σύνολο εξισώσεων (1) είναι σωστό, θεωρήστε για παράδειγμα την δεύτερη εξίσωση $E[X | Y = 2]$. Αν ο ανθρακωρύχος διαλέξει την δεύτερη σήραγγα, θα ξοδέψει 5 ώρες στην σήραγγα και έπειτα θα ξαναγυρίσει πίσω στο ίδιο μέρος από το οποίο ξεκίνησε στην στοά. Αλλά όταν γυρίσει πίσω, το πρόβλημα είναι σαν να ξεκινάει από την αρχή. Οπότε, ο αναμενόμενος επιπρόσθετος χρόνος για να φθάσει στην έξοδο θα είναι απλώς $E[X]$. Επομένως, $E[X | Y = 2] = 5 + E[X]$. Παρόμοιο επιχείρημα θα ισχύει και για τις άλλες εξισώσεις του συνόλου εξισώσεων (1).

Συνεπώς,

$$E[X] = \frac{1}{3} (3 + 5 + E[X] + 7 + E[X])$$

ή

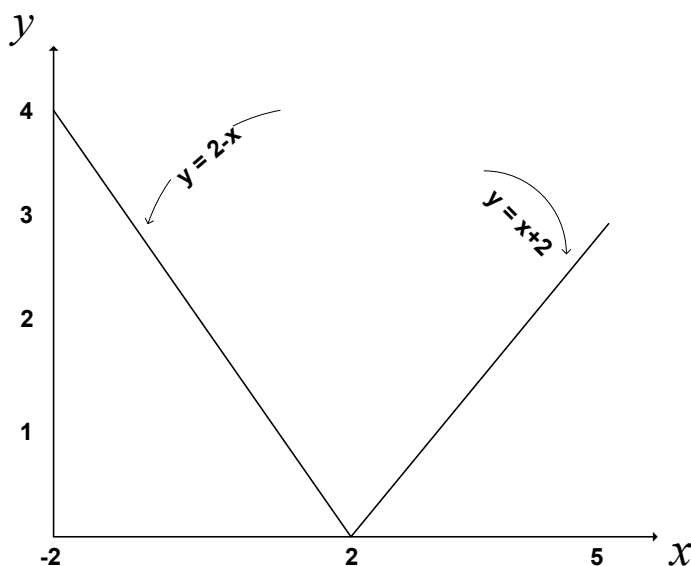
$$E[X] = 15$$

Άσκηση 0.8 Έστω ότι η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-1, 4]$. Η X μετασχηματίζεται στην τ.μ. $Y = |X - 2|$.

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού και βρείτε το πεδίο τιμών της Y .
 (β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, και κατόπιν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y .

Λύση

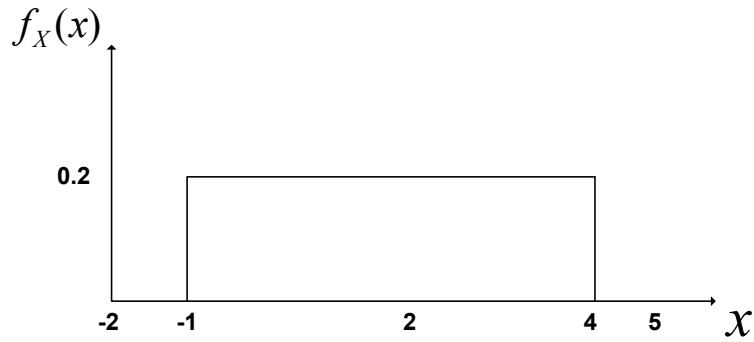
- (α) Το πεδίο τιμών της Y είναι το $[0, 3]$.



Σχήμα 6: Γραφική παράσταση των $y = 2 - x$ και $y = 2 + x$

- (β) Έχουμε ότι:

- $y \leq 0$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$
- $y \geq 3$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$



Σχήμα 7: Γραφική παράσταση της $f_X(x)$

- $0 \leq y \leq 2$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 2 + y) \\ &= \frac{1}{5} [(2 + y) - (2 - y)] = 0.4y \end{aligned}$$

- $2 \leq y \leq 3$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 4) \\ &= \frac{1}{5} [4 - (2 - y)] = 0.2(2 + y) \end{aligned}$$

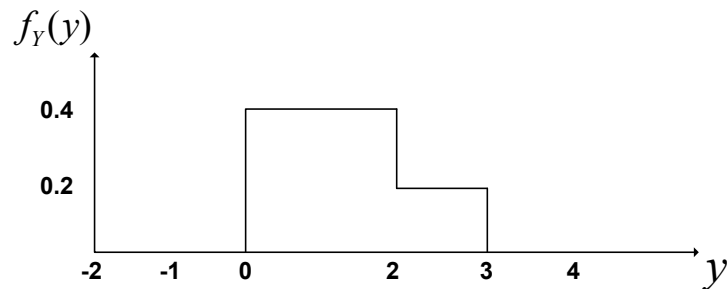
Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 0.4y & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2(2 + y) & 2 \leq y \leq 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0.4 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2 & 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το Σχήμα (8) δίνει τη γραφική παρασταση της κατανομής.



Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της $f_Y(y)$

Άσκηση 0.9 Σε ένα γραμμικό όργανο μέτρησης, η σχέση εισόδου-εξόδου είναι $Y = GX$, όπου τα μεγέθη X , Y , και G συμβολίζουν την είσοδο, την έξοδο, και το κέρδος του οργάνου, αντίστοιχα. Το κέρδος G είναι τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0.5, 1.5]$ ενώ η είσοδος X είναι τ.μ. επίσης ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$ και είναι ανεξάρτητη της G .

(α) Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y/x)$. Προσέξτε ότι για κάθε δυνατή τιμή $X = x$ της εισόδου X , πρέπει να καθορίσετε τις δυνατές τιμές της εξόδου Y καθώς και την έκφραση της $f_{Y|X}(y/x)$.

(β) Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y)$. Δώστε την γραφική παράσταση όπου η $f_{X,Y}(x, y)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές (δηλαδή το πεδίο τιμών των (x, y) στο επίπεδο).

(γ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της εξόδου Y , $f_Y(y)$.

(δ) Το όργανο σας δίνει τη μέτρηση $Y = 1/2$. Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της εισόδου X , $f_{X|Y}(x/y = \frac{1}{2})$.

Λύση

(α) Δεδομένου του $X = x$, έχουμε

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} f_G\left(\frac{y}{x}\right)$$

είναι ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0.5x, 1.5x]$. Πιο διαισθητικά, δεδομένου του $X = x$, έχουμε ότι $Y = Gx$, όπου x μπορεί να το δούμε και ως σταθερά.

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2}, \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Είναι

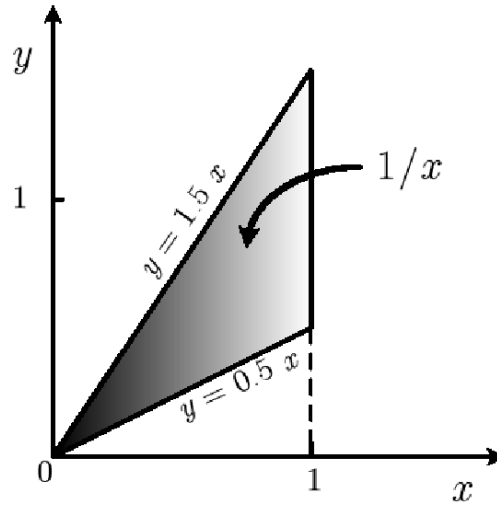
$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

(γ) Είναι

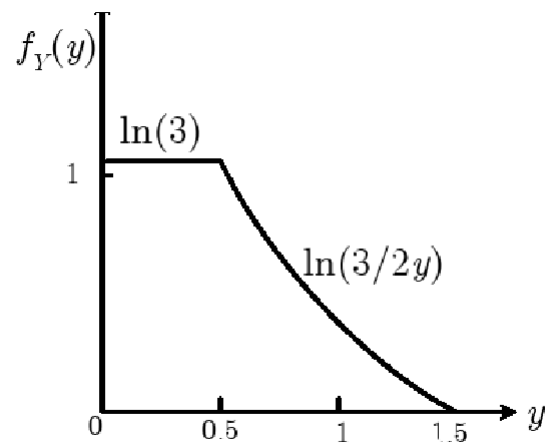
$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y) dx = \begin{cases} \int_{2/3y}^{2y} \frac{1}{x} dx = \ln(2y) - \ln\left(\frac{2y}{3}\right) = \ln(3), & 0 < y < \frac{1}{2} \\ \int_{2/3y}^1 \frac{1}{x} dx = -\ln\left(\frac{2y}{3}\right), & \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2} \end{cases}$$

(δ) Είναι

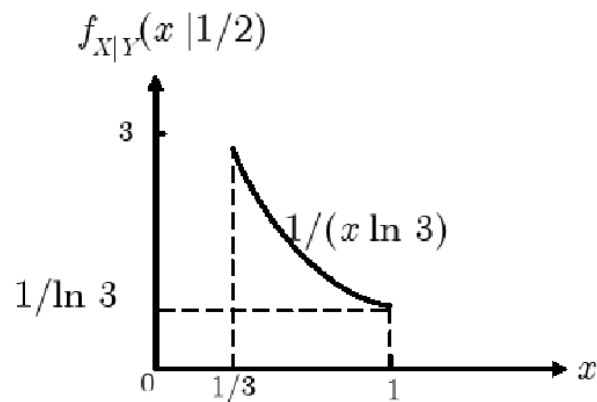
$$f_{X|Y}(x|y = 1/2) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x, 1/2)}{f_Y(1/2)} = \frac{1/x}{\ln(3)}, & 1/3 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 9: Η γραφική παράσταση για το υποερώτημα (β) της άσκησης 9.



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση για το υποερώτημα (γ) της άσκησης 9.



Σχήμα 11: Η γραφική παράσταση για το υποερώτημα (δ) της άσκησης 9.

Άσκηση 0.10 Δύο συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & y \geq 0, |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού $\sigma.\pi.\pi.$ Υπολογίστε τη σταθερά c και τις περιθωριακές $\sigma.\pi.\pi.$ $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Δώστε τη γραφική παράσταση των δύο $\sigma.\pi.\pi.$ Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;

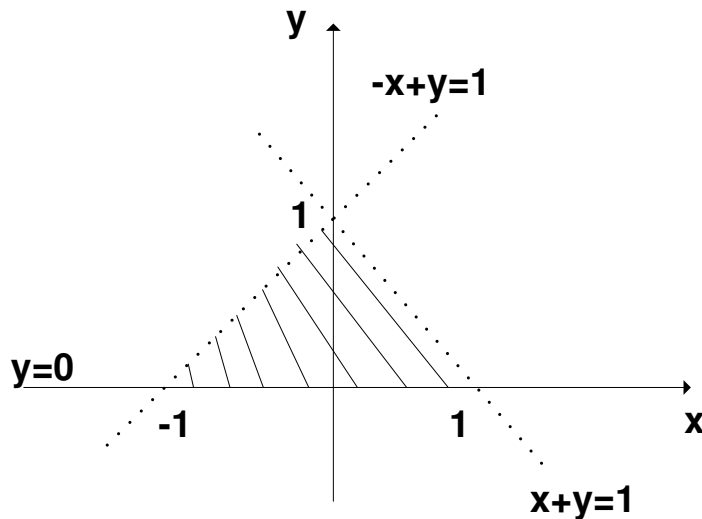
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X \geq 2Y\}$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X + Y \geq \frac{1}{2}\}$.

(δ) Υπολογίστε τις δεσμευμένες $\sigma.\pi.\pi.$ $f_{X/Y}(x/y)$ και $f_{Y/X}(y/x)$.

Λύση

(α) Η περιοχή όπου η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι c φαίνεται στο Σχήμα (12). Πρόκειται για ένα τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 1. Οι δυο ευθείες



Σχήμα 12: Χωρίο ορισμού από κοινού κατανομής Άσκησης 10.

προέρχονται από τη σχέση

$$|x| + y \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 - y \Leftrightarrow -(1 - y) \leq x \leq 1 - y \Leftrightarrow y - 1 \leq x \leq 1 - y$$

Για την σταθερά c πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dx dy = c \left(\frac{\text{βάση} \times \text{ύψος}}{2} \right) = c \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Άρα $c = 1$.

Όσον αφορά τις περιθωριακές, γενικά ισχύει ότι

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dy$$

και

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dx$$

Από το Σχήμα (12) φαίνεται ότι,

- Για $-1 \leq x \leq 0$, $f_X(x) = \int_0^{1+x} c dy = 1 + x$
- Για $0 \leq x \leq 1$, $f_X(x) = \int_0^{1-x} c dy = 1 - x$.

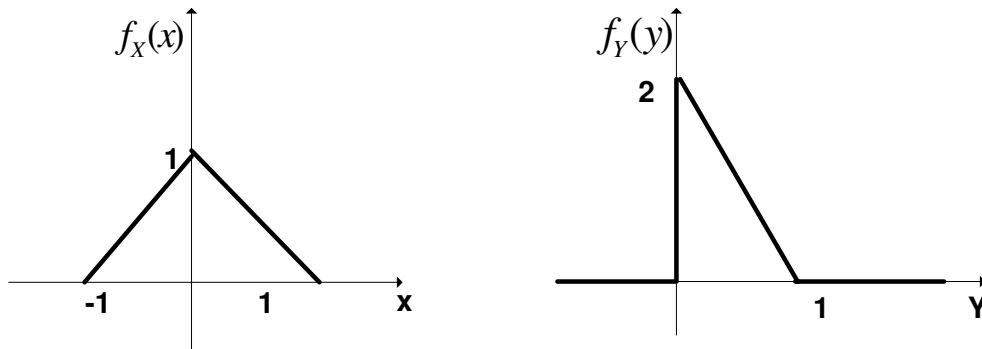
Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως για $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_{y-1}^{1-y} c dx = 2(1-y)$. Δηλαδή,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Προφανώς, $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ και οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.



Σχήμα 13: Περιθωριακές κατανομές Άσκησης 10.

- (β) Η ευθεία $y = x/2$ φαίνεται στη γραφική παράσταση του Σχήματος (14). Το διπλό ολοκλήρωμα της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο με βάση $(0, 1)$ και ύψος $\frac{1}{3}$ στο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ισούται με την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$. Άρα,

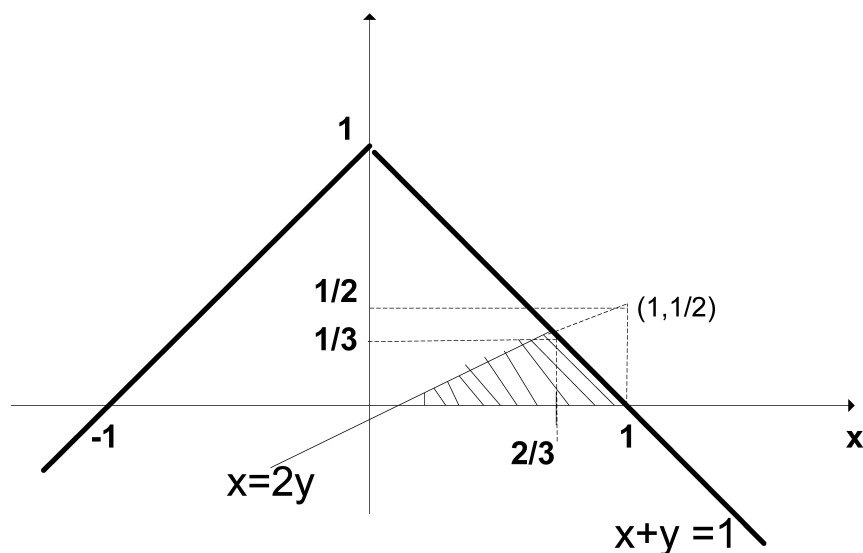
$$\begin{aligned} P(X \geq 2Y) &= \int_0^{1/3} \int_{2y}^{1-y} 1 dx dy = \int_0^{1/3} x \Big|_{2y}^{1-y} dy \\ &= \int_0^{1/3} (1 - y - 2y) dy = \left(y - 3\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, επειδή η από κοινού κατανομή είναι σταθερή, μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα απλά βρίσκοντας το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος και πολλαπλασιάζοντάς το με τη c :

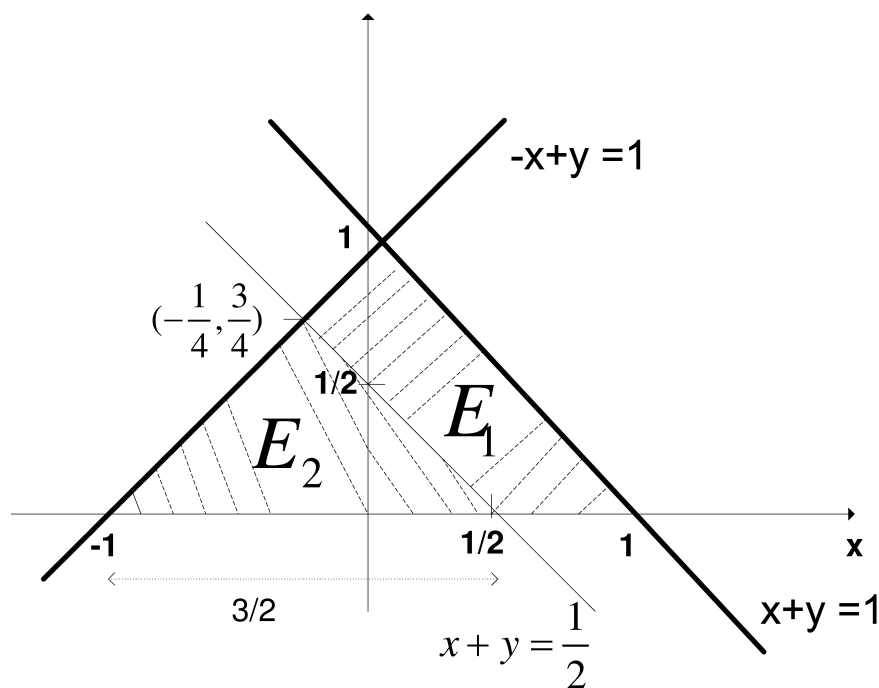
$$P(X \geq 2Y) = c \times E(\text{τριγώνου}) = 1 \times \frac{1 \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

(γ) Ομοίως από το Σχήμα (15) έχουμε ότι το ζητούμενο χωρίο είναι αυτό που έχει γραμμοσκιαστεί ως E_1 . Για να το υπολογίσουμε αναλυτικά πρέπει να σπάσουμε το χωρίο E_1 σε δυο μικρότερα. Όμως, όπως είπαμε μόλις παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα με χρήση εμβαδών, δηλ. ως το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου (όλου το χωρίου δηλαδή) μείον το εμβαδόν του E_2 :

$$P(X+Y) \geq \frac{1}{2}) = c \times E_1 = 1 \times ((E_1 + E_2) - E_2) = 1 \times \left(\frac{2 \times 1}{2} - \frac{3/2 \times 3/4}{2} \right) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$



Σχήμα 14: Χωρίο για τον υπολογισμό του $P(X \geq 2Y)$ με βάση την απο κοινού κατανομή.



Σχήμα 15: Χωρίο για τον υπολογισμό του $P(X + Y \geq 1/2)$ με βάση την απο κοινού κατανομή.

(δ) Έχουμε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2(1-y)}, \quad |x| \leq 1-y, \quad 0 < y < 1,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-|x|}, \quad 0 < y < 1-|x|, \quad |x| \leq 1.$$

Άσκηση 0.11 Οι ανεξάρτητες συνεχείς τ.μ. X και Y ακολουθούν καθεμιά ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$. Ορίζουμε την τ.μ. $Z = \frac{1}{X+Y}$.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. των X και Y .

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Z , $F_Z(z)$.

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z , $f_Z(z)$.

Λύση

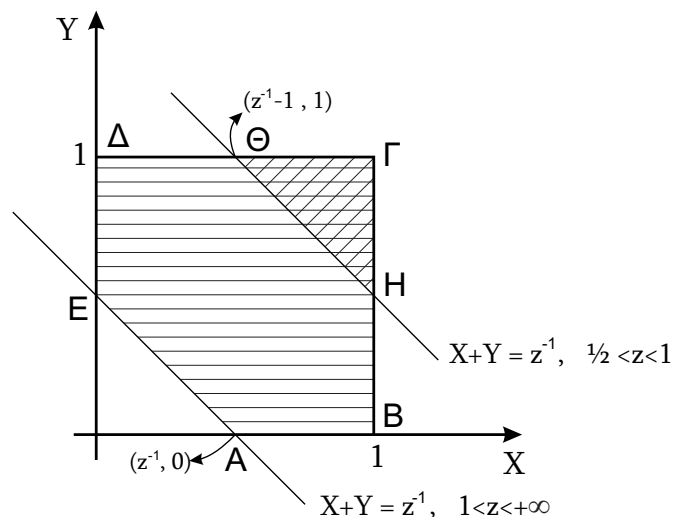
(α) Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έχουν δηλαδή από κοινού ομοιόμορφη κατανομή.

(β) Το πεδίο τιμών της τ.μ. Z είναι το $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{1}{X+Y} \leq z\right) \\ &= P(X+Y \geq z^{-1}) \\ &= \begin{cases} 0, & z < 1/2 \\ 1 \cdot E_{H\Gamma\Theta}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 \cdot E_{AB\Gamma\Delta E}, & 1 < z < +\infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & z < 1/2 \\ \frac{(2-z^{-1})^2}{2}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{z^{-2}}{2}, & 1 < z < +\infty \end{cases} \end{aligned}$$



(γ)

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 2z^{-2} - z^{-3}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ z^{-3}, & 1 < z < +\infty \end{cases}$$