

1ο Φροντιστήριο HY217

Επιμέλεια: Γ. Καφεντζής

16 Οκτωβρίου 2013

Άσκηση 0.1

Έστω δύο σύνολα A και B. Δείξτε ότι

α. $A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

β. $B^c = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$

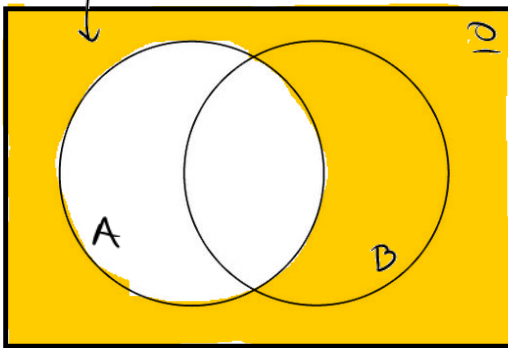
γ. $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$

δ. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω A το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει περιττός αριθμός, και το B σύνολο των ενδεχομένων να έρθει αριθμός μικρότερος του τέσσερα. Υπολογίστε τα σύνολα των δύο πλευρών της ισότητας γ και εξακριβώστε ότι η ισότητα ισχύει.

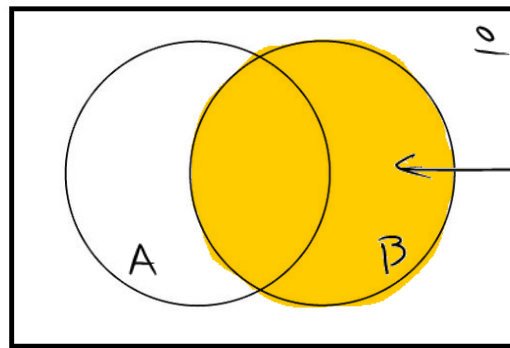
Λύση:

α)

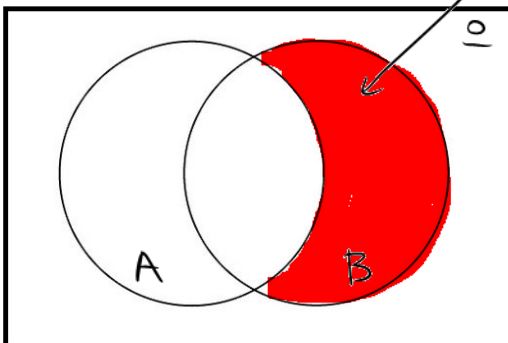
A^c



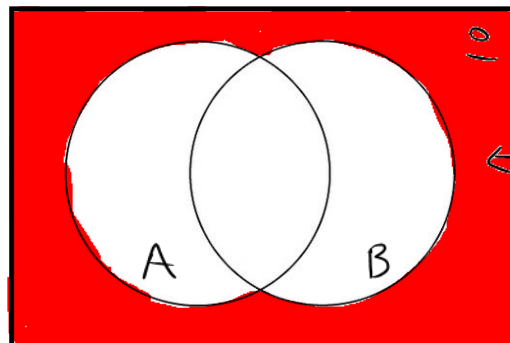
(α) 1



(β) 2

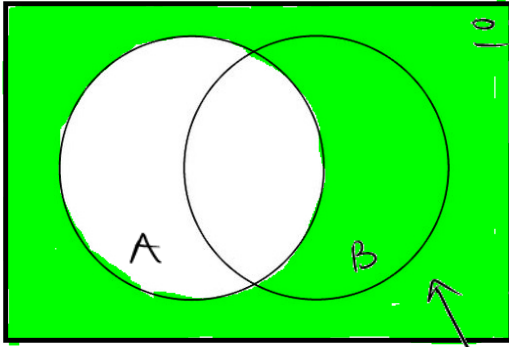


(α) 1



(β) 2

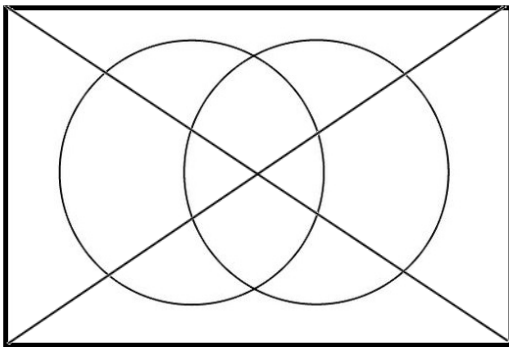
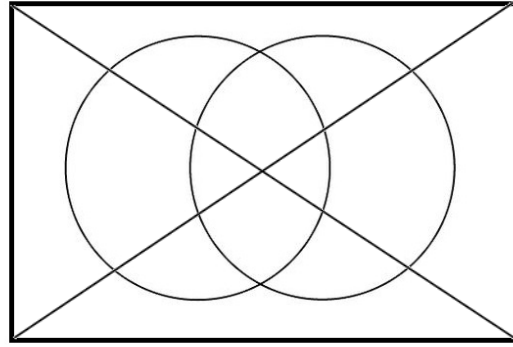
Η ένωση των δύο "κόκκινων" δίνει:



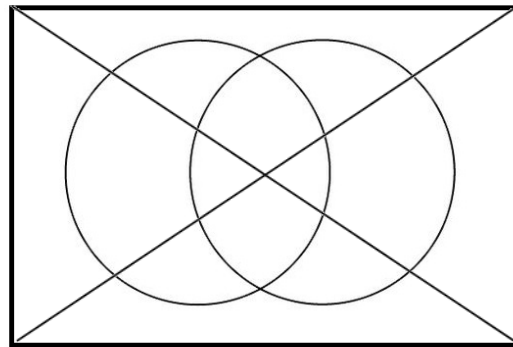
(α) 1

$$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

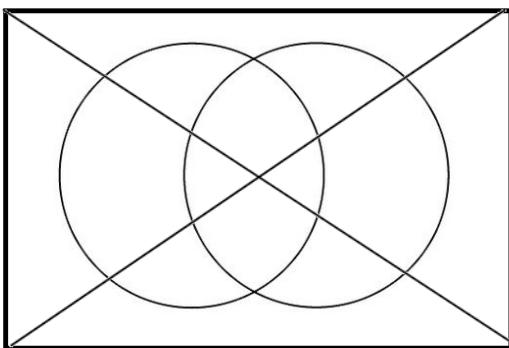
(β) 2



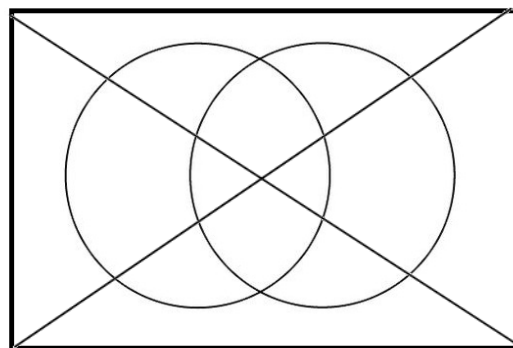
(α) 1



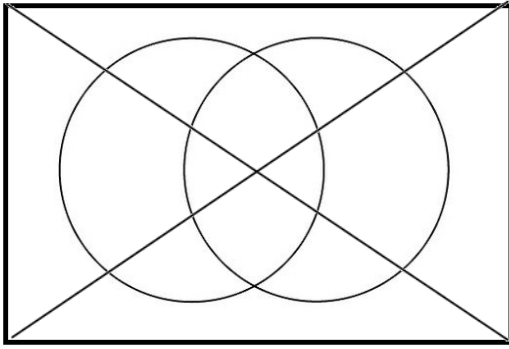
(β) 2



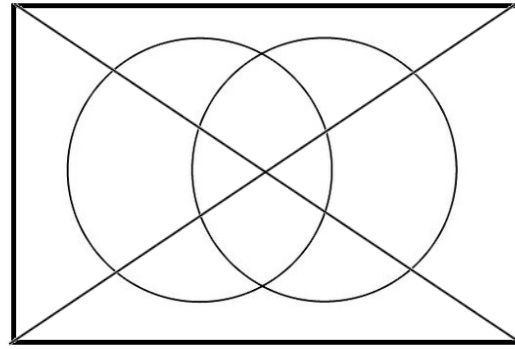
(α) 1



(β) 2



(α) 1



(β) 2

β) Μπορεί να αυθεί ξανά με διαγράμματα Venn αλλά αν παρατηρήσουμε ότι αν θέσουμε $A=B$ στη σχέση (α), τότε παίρνουμε τη σχέση του ερωτήματος (α), που δείχνει ότι ισχύει.

γ) Παρατηρούμε ότι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Τα A^c, B^c τα έχουμε από τα ερωτήματα (α), (β), έτσι:

$$A^c \cup B^c = \underbrace{(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)}_{A^c} \cup \underbrace{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)}_{B^c}$$

(De Morgan)

$$= (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c).$$

δ) $A = \{ \text{περιττός αριθμός} \} = \{1, 3, 5\}$

$B = \{ \text{αριθμός} < 4 \} = \{1, 2, 3\}$

$A^c = \{2, 4, 6\} \quad \Rightarrow \quad A^c \cup B^c = \{2, 4, 5, 6\} \text{ ①}$

$B^c = \{4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad A^c \cap B = \{2\}, \quad A^c \cap B^c = \{4, 6\}$

$A \cap B^c = \{5\}$

Άρα $\{2\} \cup \{5\} \cup \{4, 6\} = \{2, 4, 5, 6\} = \text{①}$

$A \cup A = A$

Άσκηση 0.2

Σε μια τάξη το 60% των μαθητών είναι πολύ καλοί μαθητές, το 70% λατρεύει τη σοκολάτα και το 40% ανήκει και στις δύο κατηγορίες. Διαλέγουμε τυχαία έναν μαθητή της τάξης αυτής. Βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός να μην είναι πολύ καλός μαθητής και να μην του αρέσει η σοκολάτα.

Λύση:

Έστω $A = \{ \text{ο μαθητής είναι πολύ καλός} \}$

$B = \{ \text{———} \cdot \text{———} \text{ λατρεύει τη σοκολάτα} \}$

$A \cap B = \{ \text{———} \cdot \text{———} \text{ είναι πολύ καλός ΚΑΙ λατρεύει τη σοκολάτα} \}$

$A^c = \{ \text{ο μαθητής ΔΕΝ είναι πολύ καλός} \}$

$B^c = \{ \text{———} \cdot \text{———} \text{ ΔΕΝ λατρεύει τη σοκολάτα} \}$

Ζητείται η πιθανότητα $P(A^c \cap B^c)$.

Από De Morgan, $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, άρα

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)^*$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)^*$$

$$= 1 - 0.6 - 0.7 + 0.4 =$$

$$= 0.1 \sim 10\%$$

* Γιατί $P(A^c) = 1 - P(A)$

* Γιατί $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Άσκηση 0.3

α. Αποδείξτε ότι για δύο τυχαία γεγονότα A και B ισχύει

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

β. Γενικεύοντας το α. για n γεγονότα $A_1, A_2, \dots, A_n$ δείξτε ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1).$$

γ. Αποδείξτε το β. ξανά, αυτή τη φορά με χρήση επαγωγής.

Λύση:

α) Προφανώς, για κάθε ενδεχόμενο A, ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Για την $P(A \cup B)$ ισχύει φυσικά η 1 , άρα θα είναι

$$0 \leq P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B).$$

β) Έχουμε $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1 \cap \underbrace{A_2 \cap \dots \cap A_n}_B) \geq$ (από α)
 $\geq P(A_1) + P(B) - 1 \geq$
 $\geq P(A_1) + P(A_2) + P(\underbrace{A_3 \cap \dots \cap A_n}_B) - 1 - 1 \geq \dots$
 $\geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) - (n-1).$

γ) Για $n=2$, $P(A_1) + P(A_2) - 1 \leq P(A_1 \cap A_2)$, ισχύει από (α).
Έστω ότι ισχύει για $n=k$: $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) \geq P(A_1) + \dots + P(A_k) - (k-1)$ ②. Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει και για $n=k+1$. Είναι $P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k}_{A_k}) \geq$ (από α)
 $\geq P(A_{k+1}) + P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) - 1 \geq$
 $\geq P(A_{k+1}) + P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) - 1 - (k-1)$ (από ②)

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1}) - k, \text{ να είναι και το ζητούμενο.}$$

Άσκηση 0.4

Ρίχνουμε δύο ζάρια

α. Βρείτε την πιθανότητα να έρθουν διπλές.

β. Δεδομένου ότι το άθροισμα των δύο ζαριών που ρίξαμε ήρθε μικρότερο ή ίσο του 4, βρείτε την πιθανότητα να ήρθαν διπλές.

γ. Βρείτε την πιθανότητα τουλάχιστον το ένα ζάρι να έφερε 6.

δ. Δεδομένου ότι τα δύο ζάρια φέρανε διαφορετικούς αριθμούς, βρείτε την πιθανότητα τουλάχιστον το ένα ζάρι να έφερε 6.

Λύση:

α) Προφανώς, ο δειγματοχώρος των πειράματος έχει 36 στοιχεία: $(x, y), x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Υπάρχουν 6 πιθανές διπλές, άρα $P(\text{διπλές}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

β) Έστω $A = \{\text{άθροισμα} \leq 4\}$, $B = \{\text{ήρθαν διπλές}\}$,

$$\begin{aligned} \text{τότε } P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(1,1), (2,2)\})}{P(\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2)\})} = \\ &= \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

γ) Το σύνολο $\{\text{τουλάχιστον ένα ζάρι έφερε 6}\}$ μπορεί να γραφεί ως η ένωση δύο συνόλων:

$$\{\text{το } Z_1 \text{ έφερε 6}\} \cup \{\text{το } Z_2 \text{ έφερε 6}\} = C_1 \cup C_2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } P(C_1 \cup C_2) &= P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

δ) Έστω $D = \{\text{τα ζάρια έφεραν διαφορετ. αριθμούς}\}$ και $E = \{\text{τουλάχισ. ένα ζάρι έφερε 6}\}$. Ζητείται το $P(E|D)$.

$$\text{Είναι } P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{10/36}{30/36} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 0.6

60% των μαθητών ενός σχολείου δεν φορούν ούτε δαχτυλίδι ούτε κολιέ. 20% φορούν δαχτυλίδι και 30% φορούν κολιέ. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή, ποια η πιθανότητα ο μαθητής να φορά

- α. ένα δαχτυλίδι ή ένα κολιέ·
- β. ένα δαχτυλίδι και ένα κολιέ·

Λύση:

Έστω $A = \{ \text{ο μαθητής φορά κολιέ} \}$
 $B = \{ \text{ο μαθητής φορά δαχτυλίδι} \}$
και A^c, B^c τα συμπληρώματά τους.

α) Το σύνολο $\{ \text{ο μαθητής φορά ένα δαχτυλίδι} \}$ ή ένα κολιέ περιγράφεται από την ένωση των A, B , δηλ. ζητείται το $P(A \cup B)$. Θα είναι:
$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0.6 = 0.4.$$

β) Το σύνολο $\{ \text{ο μαθητής φορά δαχτυλίδι, κ κολιέ} \}$ δίνεται από την τομή των A, B . Άρα ζητάμε το $P(A \cap B)$. Ξέραμε όμως ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$0.6 = 0.3 + 0.2 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(A \cap B) = 0.1.$$