

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω ότι 105 επιβάτες έχουν κράτηση για να ταξιδέψουν με ένα αεροπλάνο 100 θέσεων από το Ηράκλειο στην Θεσσαλονίκη. Ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται για να ταξιδέψουν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διωνυμική τ.μ. X με παραμέτρους $(105, 0.9)$.

(α) Βρείτε την πιθανότητα ότι όλοι οι επιβάτες που εμφανίζονται βρίσκουν θέση, δηλαδή βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 100)$.

(β) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός των μη-εμφανισθέντων επιβατών μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μία Ποισσον τ.μ. Y και υπολογίστε την παράμετρο λ .

(γ) Υπολογίστε και πάλι την πιθανότητα ότι όλοι οι επιβάτες που εμφανίζονται βρίσκουν θέση, με βάση το μοντέλο Ποισσον, δηλαδή βρείτε την πιθανότητα $P(Y \geq 5)$, και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο υποερώτημα (α).

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} P(X \leq 100) &= 1 - P(X > 100) \\ &= 1 - [P(X = 105) + P(X = 104) + P(X = 103) + P(X = 102) + P(X = 101)] \\ &= 1 - [(0.9)^{105} + \binom{105}{1}(0.9)^{104}(0.1) + \binom{105}{2}(0.9)^{103}(0.1)^2 \\ &\quad + \binom{105}{3}(0.9)^{102}(0.1)^3 + \binom{105}{4}(0.9)^{101}(0.1)^4] \\ &= 0.983283 \end{aligned}$$

(β) Αν η X είναι τυχαία διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p) , τότε η $Y = n - X$ θα είναι διωνυμική με παραμέτρους $(n, 1 - p)$. Έτσι ο αριθμός των μη-εμφανίσεων είναι διωνυμική τυχαία κατανομή με παραμέτρους $(105, 0.1)$. Εφόσον το n είναι μεγάλο και το p μικρό, είναι λογικό να τον προσεγγίσουμε με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = np = 10.5$.

(γ)

$$\begin{aligned} P(Y \geq 5) &= 1 - P(Y < 5) \\ &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)] \\ &= 1 - e^{(-10.5)}[1 + (10.5) + (10.5)^2/2 + (10.5)^3/6 + (10.5)^4/24] \\ &= 0.978906 \end{aligned}$$

που είναι πολύ κοντά με την πιθανότητα που βρήκαμε στο ερώτημα (α).

2. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας παίζουν σκάκι και ο πρώτος που κερδίζει μία παρτίδα, κερδίζει τον αγώνα. Μετά από 10 συνεχόμενες ισόπαλες παρτίδες, ο αγώνας τελειώνει ισόπαλος. Μία παρτίδα

κερδίζεται από τον Χρήστο με πιθανότητα 0.4, από τον Ανδρέα με πιθανότητα 0.3, και λήγει ισόπαλη με πιθανότητα 0.3.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα.

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , όπου X είναι η διάρκεια του αγώνα σε παρτίδες.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X .

Λύση

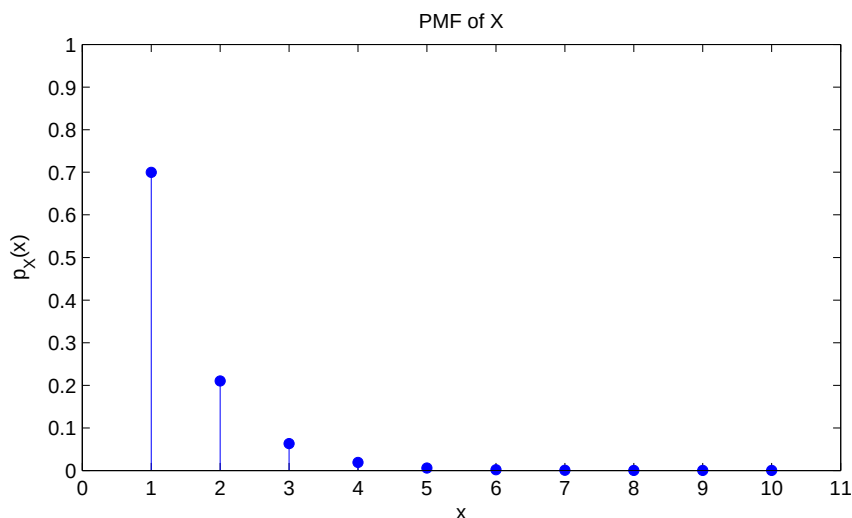
(α) Έστω X η διάρκεια του αγώνα σε παρτίδες. Για να κερδίσει ο Χρήστος έναν αγώνα X παρτίδων, πρέπει οι $(X - 1)$ πρώτες παρτίδες να λήξουν ισόπαλες και η τελευταία παρτίδα να κερδηθεί από το Χρήστο. Αθροίζοντας ως προς όλες τις δυνατές τιμές της X έχουμε:

$$P(\text{Ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα}) = \sum_{x=1}^{10} 0.3^{x-1} 0.4 = 0.571425.$$

(β) Ο αγώνας έχει διάρκεια X αν συμβούν $X - 1$ ισοπαλίες και ακολουθήσει νίκη οποιουδήποτε παίκτη. Υπάρχει, όμως, μία εξαίρεση: ο αγώνας θα έχει διάρκεια $X = 10$ αν και μόνο αν συμβούν 9 ισοπαλίες. Η πιθανότητα νίκης ανεξαρτήτως παίκτη είναι ίση με 1 μείον την πιθανότητα ισοπαλίας.

Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.3^{x-1} 0.7, & x = 1 \dots 9 \\ 0.3^9, & x = 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(γ) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{10} x \cdot p_X(x) = \sum_{x=1}^9 x \cdot 0.3^{x-1} 0.7 + 10 \cdot 0.3^9 = 1.42856$$

3. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ΗΥ (σε χιλιάδες κομμάτια) που πουλάει η *Dell* στη διάρκεια μιας μέρας είναι μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & \text{αν } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$, της X .

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι ο αριθμός των ΗΥ που πωλούνται σε μία μέρα (ι) ξεπερνά τις 3000, (ιι) είναι μεταξύ 1500 και 9000;

(δ) Αν A και B είναι τα γεγονότα (ι) και (ιι), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

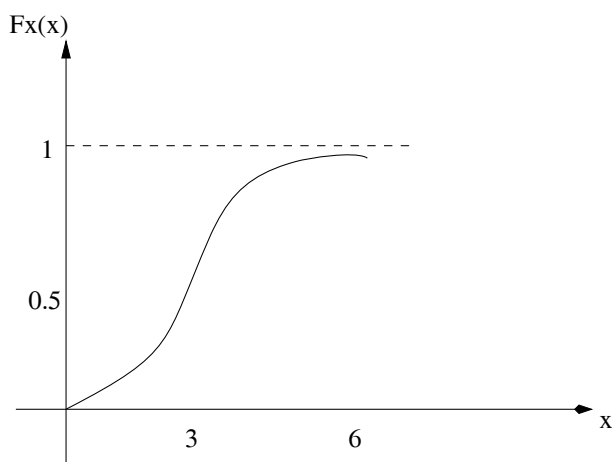
Λύση

(α) Προφανώς θα πρέπει $c > 0$ (ώστε $f_X(x) \geq 0, \forall x$). Επίσης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Rightarrow c \int_0^3 x dx + c \int_3^6 (6-x) dx = 1 \\ c \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 + c \left(6x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_3^6 &= 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$. Συνεπώς:

- $x < 0 : F_X(x) = 0$
- $0 \leq x < 3 : F_X(x) = \frac{1}{9} \int_0^x u du = \frac{x^2}{18}$
- $3 \leq x < 6 : F_X(x) = \frac{1}{9} \int_0^3 u du + \frac{1}{9} \int_3^x (6-u) du = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}$
- $x \geq 6 : F_X(x) = 1$



Σχήμα 1: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για το ερώτημα (β) Άσκηση 1.

(γ) Εφόσον ο αριθμός των κομματιών που πουλάει η εταιρία μέσα σε μια μέρα μετρίεται σε χιλιάδες κομμάτια, τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι οι εξής:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5$$

και

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = F_X(9) - F_X(1.5) = 1 - 0.125 = 0.875$$

(δ) Η τομή των γεγονότων A και B είναι το γεγονός $A \cap B = 3 < X \leq 9$ και

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Οπότε τα γεγονότα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

4. Το πλάτος των βιδών που παράγονται σε κάποιο εργοστάσιο ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0.9 \text{ cm}$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003 \text{ cm}$, δηλαδή $X \sim N(0.9, 0.003^2)$.

(α) Αν οι τεχνικές προδιαγραφές των πελατών επιβάλουν το πλάτος των βιδών να είναι $0.9 \pm 0.005 \text{ cm}$, (επομένως βίδες με πλάτος εκτός αυτών των ορίων να θεωρούνται ελαττωματικές) τι ποσοστό των βιδών που παράγονται από αυτό το εργοστάσιο είναι ελαττωματικές ;

(β) Στόχος της εταιρίας είναι κατά μέσο όρο μόνο μία στις 100 βίδες να βγαίνει ελαττωματική. Ποια η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για την τυπική απόκλιση, σ , ώστε η εταιρία να πετυχαίνει το στόχο της ;

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} P(X \text{ δεν ξεπερνά τα όρια}) &= P\{(0.9 - 0.005) \leq X < (0.9 + 0.005)\} \\ &= P\left\{\frac{0.895 - 0.9}{0.003} \leq \frac{X - 0.9}{0.003} < \frac{0.9 + 0.005 - 0.9}{0.003}\right\} \\ &= P\left\{-\frac{5}{3} \leq Z < \frac{5}{3}\right\} = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \\ &= 2 * 0.9522 - 1 = 0.9044 \end{aligned}$$

Έτσι η πιθανότητα η βίδα να είναι ελαττωματική είναι $1 - 0.9044 = 0.0956$ που σημαίνει ότι 9.56% των βιδών της εταιρείας είναι ελαττωματικές.

(β) Από το ερώτημα (α), μπορεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} P(X \text{ δεν ξεπερνά τα όρια}) &= P\{(0.9 - 0.005) \leq X < (0.9 + 0.005)\} \\ &= P\left\{-\frac{5}{3} \leq Z < \frac{5}{3}\right\} = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

Επίσης, $P(X \text{ είναι ελαττωματική}) < 0.01 \implies P(X \text{ δεν ξεπερνά τα όρια}) > 0.99$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} 2\Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) - 1 &> 0.99 \text{ ή} \\ \Phi\left(\frac{0.005}{\sigma}\right) &> \frac{1.99}{2} = 0.995 = \Phi(2.575) \end{aligned}$$

Εφόσον η $\Phi(x)$ είναι μονότονη, αυτό ισοδυναμεί με

$$\frac{0.005}{\sigma} > 2.575$$

Έτσι

$$\sigma_{max} = \frac{0.005}{2.575} > 1.942 * 10^{-3}$$

5. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας μοιράζονται τον ίδιο υπολογιστή. Ο Χρήστος χρησιμοποιεί τον υπολογιστή για να ελέγξει το e-mail του κάθε 30 λεπτά, στις $xx:15$ και $xx:45$ κάθε ώρας. Στις 6:00 το απόγευμα ο Ανδρέας αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή για μία εργασία του. Η εργασία θα πάρει ένα χρονικό διάστημα που μοντελοποιείται από μία εκθετική τ.μ. T με παράμετρο $\lambda = 1/60$, δηλαδή $T \sim \text{Exp}(1/60)$ (σε λεπτά της ώρας). Ο Χρήστος δεν μπορεί να ελέγξει το e-mail του όσο ο Ανδρέας εργάζεται στον υπολογιστή.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει έναν ή περισσότερους προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει ακριβώς τρεις προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.

Λύση

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι να χρησιμοποιήσει ο Ανδρέας τον υπολογιστή πάνω από 15 λεπτά. Εφόσον $T \sim \text{Exp}(1/60)$ λεπτά είναι ο χρόνος που περνάει ο Ανδρέας στον υπολογιστή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(T > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-1/4}$$

(β) Αν ο Χρήστος χάσει ακριβώς μια φορά να ελέγξει τα emails του, τότε $15 \leq T < 45$. Αν χάσει ακριβώς 2 φορές να ελέγξει τα emails του, τότε $45 \leq T < 75$. Γενικά, αν δεν ελέγξει τα emails του n φορές τότε: $15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15$. ;ρα:

$$P(\{15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15\}) = \int_{30n-15}^{30n+15} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-n/2} (e^{1/4} - e^{-1/4})$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα να χάσει 3 emails είναι $e^{-3/2} (e^{1/4} - e^{-1/4})$.