

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΤΕΤΑΡΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Η παράδοση θα γίνει μέχρι την Πέμπτη 09/01/2014 στο διάλειμμα του μαθήματος, σε χαρτί.

1. Έστω ότι 105 επιβάτες έχουν κράτηση για να ταξιδέψουν με ένα αεροπλάνο 100 θέσεων από το Ηράκλειο στην Θεσσαλονίκη. Ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται για να ταξιδέψουν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διωνυμική τ.μ. X με παραμέτρους $(105, 0.9)$.

(α) Βρείτε την πιθανότητα ότι όλοι οι επιβάτες που εμφανίζονται βρίσκουν θέση, δηλαδή βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 100)$.

(β) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός των μη-εμφανισθέντων επιβατών μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μία Ποισσον τ.μ. Y και υπολογίστε την παράμετρο λ .

(γ) Υπολογίστε και πάλι την πιθανότητα ότι όλοι οι επιβάτες που εμφανίζονται βρίσκουν θέση, με βάση το μοντέλο Ποισσον, δηλαδή βρείτε την πιθανότητα $P(Y \geq 5)$, και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο υποερώτημα (α).

2. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας παίζουν σκάκι και ο πρώτος που κερδίζει μία παρτίδα, κερδίζει τον αγώνα. Μετά από 10 συνεχόμενες ισόπαλες παρτίδες, ο αγώνας τελειώνει ισόπαλος. Μία παρτίδα κερδίζεται από τον Χρήστο με πιθανότητα 0.4, από τον Ανδρέα με πιθανότητα 0.3, και λήγει ισόπαλη με πιθανότητα 0.3.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα.

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , όπου X είναι η διάρκεια του αγώνα σε παρτίδες.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X .

3. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ΗΥ (σε χιλιάδες κομμάτια) που πουλάει η *Dell* στη διάρκεια μιας μέρας είναι μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ c(6 - x) & \text{αν } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$, της X .

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι ο αριθμός των ΗΥ που πωλούνται σε μία μέρα (ι) ξεπερνά τις 3000, (ιι) είναι μεταξύ 1500 και 9000;

(δ) Αν A και B είναι τα γεγονότα (ι) και (ιι), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

4. Το πλάτος των βιδών που παράγονται σε κάποιο εργοστάσιο ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0.9 \text{ cm}$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003 \text{ cm}$, δηλαδή $X \sim N(0.9, 0.003^2)$.

(α) Αν οι τεχνικές προδιαγραφές των πελατών επιβάλουν το πλάτος των βιδών να είναι 0.9 ± 0.005 cm, (επομένως βίδες με πλάτος εκτός αυτών των ορίων να θεωρούνται ελαττωματικές) τι ποσοστό των βιδών που παράγονται από αυτό το εργοστάσιο είναι ελαττωματικές ;

(β) Στόχος της εταιρίας είναι κατά μέσο όρο μόνο μία στις 100 βίδες να βγαίνει ελαττωματική. Ποια η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για την τυπική απόκλιση, σ , ώστε η εταιρία να πετυχαίνει το στόχο της ;

5. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας μοιράζονται τον ίδιο υπολογιστή. Ο Χρήστος χρησιμοποιεί τον υπολογιστή για να ελέγξει το e-mail του κάθε 30 λεπτά, στις $xx:15$ και $xx:45$ κάθε ώρας. Στις 6:00 το απόγευμα ο Ανδρέας αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή για μία εργασία του. Η εργασία θα πάρει ένα χρονικό διάστημα που μοντελοποιείται από μία εκθετική τ.μ. T με παράμετρο $\lambda = 1/60$, δηλαδή $T \sim \text{Exp}(1/60)$ (σε λεπτά της ώρας). Ο Χρήστος δεν μπορεί να ελέγξει το e-mail του όσο ο Ανδρέας εργάζεται στον υπολογιστή.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει έναν ή περισσότερους προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει ακριβώς τρεις προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.