ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΛΥΣΕΙΣ ΤΡΙΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω A, B και C ανεξάρτητα ενδεχόμενα με P(C) > 0. Αποδείξτε ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα δεδομένου του C.

Λύση
Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \mid C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)} \\
&= P(A)P(B) \\
&= P(A \mid C)P(B \mid C)
\end{aligned}
$$

2. Επισκέπτεστε ένα βιβλιοπωλείο για να αγοράσετε βιβλία για τις διακοπές σας. Περνάτε X ώρες στο βιβλιοπωλείο, όπου X είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που παίρνει με ίση πιθανότητα τις τιμές $1, 2, 3$ και 4. Αγοράζετε N βιβλία, όπου N είναι επίσης διακριτή τ.μ. η οποία εξαρτάται από το χρόνο που περνάτε στο βιβλιοπωλείο και περιγράφεται από την ακόλουθη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{N/X}(n/k) = \frac{1}{k}; \;\; n = 1, 2, \ldots, k.$$

(α) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.
(β) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και N.
(γ) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. N.
(δ) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. N.
(ε) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Βαψες, βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δεδομένου ότι $N = 2$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της ομοιόμορφης τ.μ. X είναι:

$$
\begin{aligned}
P_X(k) &= \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \\
E[X] &= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4} \cdot k = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2} \\
var\,(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1^2+2^2+3^3+4^2}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

(β) Έχουμε ότι:

$$P_{N,X}(n,k) = P_{N|X}(n \mid k)\cdot P_X(k) = \frac{1}{4k}, \quad k=1,2,3,4;\ n=1,\ldots,k.$$

$P_{N,X}(n,k) =$

$n\,k$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	–	1/8	1/12	1/16
3	–	–	1/12	1/16
4	–	–	–	1/16

(γ) Είναι:

$$P_N(n) = \sum_{k=n}^{4} P_{N,X}(n,k) = \sum_{k=n}^{4}\frac{1}{4k} = \begin{cases} \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}, & n=1\\ \frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{13}{48}, & n=2\\ \frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48}, & n=3\\ \frac{1}{16}, & n=4 \end{cases}$$

(δ) Είναι:

$$E[N] = \sum_{n=1}^{4} n\cdot P_N(n) = \ldots = 1.75$$

και

$$var(N) = E[N^2]-(E[N])^2 = \sum_{n=1}^{4} n^2\cdot P_N(n) - 1.75^2 = 0.854$$

(ε) Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δεδομένου ότι $N=2$ θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P_{X|N}(k \mid n=2) &= \frac{P_{N|X}(2\mid k)\cdot P_X(k)}{P_N(2)} = \frac{\frac{1}{4k}}{13/48} = \\ &= \frac{12}{13k}, \quad k=2,3,4. \end{aligned}$$

3. Μία ασφαλιστική εταιρία κατατάσσει τους ανθρώπους σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επικινδυνότητα τους στην οδήγηση: Κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρίας δείχνουν ότι οι πιθανότητες πελάτες μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα. Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% αποτελείται από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% αποτελείται από άτομα μεγάλου ρίσκου, ποιο ποσοστό του πληθυσμού έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους· Αν κάποιος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το 2002, ποια η πιθανότητα ότι είναι άτομο
(α) μικρού ρίσκου·
(β) μέτριου ρίσκου·

Λύση
Έστω G το γεγονός κάποιος να είναι καλός οδηγός, M να είναι μέτριος και B κακός. Αν A το γεγονός κάποιος να είχε ατύχημα, τότε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|G)P(G)+P(A|M)P(M)+P(A|B)P(B) \\ &= (0.05)*(0.2)+(0.15)(0.5)+(0.3)(0.3) = 0.175 \end{aligned}$$

$$P(G|A^c) = \frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 * 0.2}{0.825}$$

$$P(M|A^c) = \frac{P(A^c|M)P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 * 0.5}{0.825}$$

4. Μια ομάδα μπάσκετ κερδίζει τα παιχνίδια της με πιθανότητα p και τα χάνει με πιθανότητα $1-p$. Η απόδοσή της σε κάθε παιχνίδι είναι ανεξάρτητη της απόδοσής της σε οποιοδήποτε άλλο παιχνίδι. Έστω L_1 ο αριθμός των ηττών πριν την πρώτη νίκη και L_2 ο αριθμός των ηττών μετά την πρώτη νίκη και πριν τη δεύτερη νίκη. Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (ς.π.) των τυχαίων μεταβλητών L_1 και L_2.

Λύση

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις ολικής πιθανότητας των L_1 και L_2 είναι οι ίδιες. Η πιθανότητα η ομάδα του Εργοτέλη να χάσει l_1 φορές πριν από μια νική ισούται με:

$$(1-p)^{l_1}p$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$p_{L_1}(l_1) = (1-p)^{l_1}p \text{ για } l_1 = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$p_{L_2}(l_2) = (1-p)^{l_2}p \text{ για } l_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Εφόσον οι L_1 και L_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η κοινή συνάρτηση του ολικής πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$p_{L_1,L_2} = p_{L_1}(l_1)p_{L_2}(l_2) = (1-p)^{l_1+l_2}p^2 \text{ για } l_1, l_2 = 0, 1, 2, \dots$$

5. Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού ς.π.

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{αν } x \in \{1,2,4\} \text{ και } y \in \{1,3\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c·
(β) Ποια είναι η $P(Y < X)$·
(γ) Ποια είναι η $P(Y > X)$·
(δ) Ποια είναι η $P(Y = X)$·
(ε) Ποια είναι η $P(Y = 3)$·
(στ) Βρείτε τις περιθωριακές ς.π. των X και Y.
(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές των X και Y.
(η) Βρείτε τις διασπορές των X και Y.

Λύση

(α) Από την κοινή $\sigma.\pi.$, υπάρχουν 6 ζευγάρια συντεταγμένων (x, y) με μη μηδενική πιθανότητα εμφάνισης. Αυτά τα ζευγάρια είναι τα: $(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (4,1)$ και $(4,3)$. Η πιθανότητα ενός ζευγαριού είναι ανάλογη του γινομένου των x και y συντεταγμένων του ζευγαριού. Επειδή η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματικού χώρου πρέπει να είναι ίση με 1, θα πρέπει:

$$(1 \cdot 1)c + (1 \cdot 3)c + (2 \cdot 1)c + (2 \cdot 3)c + (4 \cdot 1)c + (4 \cdot 3)c = 1$$

Λύνοντας ως προς c παίρνουμε: $c = \boxed{\frac{1}{28}}$

(β) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y < x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y < X) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(4,1)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{2 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{18}{28}}$$

(γ) Υπάρχουν 2 δειγματικά σημεία για τα οποία $y > x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y > X) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{9}{28}}$$

(δ) Υπάρχει 1 δειγματικό σημείο για το οποίο $y = x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = X) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1 \cdot 1}{28} = \boxed{\frac{1}{28}}$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τα δύο παραπάνω μέρη της άσκησης, προκύπτει η αναμενόμενη ισότητα:

$$P(Y < X) + P(Y > X) + P(Y = X) = \frac{18}{28} + \frac{9}{28} + \frac{1}{28} = 1$$

(ε) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y = 3$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = 3) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,3)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{21}{28}}$$

(στ) Γενικά, για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες έχει οριστεί κοινή συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) \qquad \text{και} \qquad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)$$

Σε αυτό το πρόβλημα, ο αριθμός των (X, Y) ζευγαριών είναι αρκετά μικρός, οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις (οριακές) $\sigma.\pi.$ με απαρίθμηση. Για παράδειγμα,

$$p_X(2) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(2,3)\}) = \frac{8}{28}$$

Συνολικά, θα έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/28 & , x = 1; \\ 8/28 & , x = 2; \\ 16/28 & , x = 4; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/7 & , x = 1; \\ 2/27 & , x = 2; \\ 4/27 & , x = 4; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/28 & , y = 1; \\ 21/28 & , y = 3; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/4 & , y = 1; \\ 3/4 & , y = 3; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(ζ) Γενικά, η αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x)$$

Για αυτό το πρόβλημα, θα έχουμε:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{3}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(η) Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να υπολογισθεί ως $E[X^2] - E[X]^2$ ή ως $E[(X - E[X])^2]$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μέθοδο προκύπτει ότι:

$$var(X) = (1-3)^2 \cdot \frac{1}{7} + (2-3)^2 \cdot \frac{2}{7} + (4-3)^2 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{10}{7}}$$

και

$$var(Y) = (1 - \frac{5}{2})^2 \cdot \frac{1}{4} + (3 - \frac{5}{2})^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \boxed{\frac{3}{4}}$$