

**HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013**  
**Διδάσκων: Π. Τραχανιάς**

**ΤΡΙΤΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**ΠΑΡΑΔΟΣΗ 10.12.2013**

1. Έστω  $A$ ,  $B$  και  $C$  ανεξάρτητα ενδεχόμενα με  $P(C) > 0$ . Αποδείξτε ότι τα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα δεδομένου του  $C$ .

2. Επισκέπτεστε ένα βιβλιοπωλείο για να αγοράσετε βιβλία για τις διακοπές σας. Περνάτε  $X$  ώρες στο βιβλιοπωλείο, όπου  $X$  είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που παίρνει με ίση πιθανότητα τις τιμές 1, 2, 3 και 4. Αγοράζετε  $N$  βιβλία, όπου  $N$  είναι επίσης διακριτή τ.μ. η οποία εξαρτάται από το χρόνο που περνάτε στο βιβλιοπωλείο και περιγράφεται από την ακόλουθη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{N/X}(n/k) = \frac{1}{k}; \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

(α) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ.  $X$ .

(β) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ.  $X$  και  $N$ .

(γ) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $N$ .

(δ) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ.  $N$ .

(ε) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes, βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $X$  δεδομένου ότι  $N = 2$ .

3. Μία ασφαλιστική εταιρία κατατάσσει τους ανθρώπους σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επικινδυνότητα τους στην οδήγηση: Κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρίας δείχνουν ότι οι πιθανότητες πελάτες μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα. Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% αποτελείται από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% αποτελείται από άτομα μεγάλου ρίσκου, ποιο ποσοστό του πληθυσμού έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους; Αν κάποιος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το 2002, ποια η πιθανότητα ότι είναι άτομο

(α) μικρού ρίσκου;

(β) μέτριου ρίσκου;

4. Μια ομάδα μπάσκετ κερδίζει τα παιχνίδια της με πιθανότητα  $p$  και τα χάνει με πιθανότητα  $1 - p$ . Η απόδοσή της σε κάθε παιχνίδι είναι ανεξάρτητη της απόδοσής της σε οποιοδήποτε άλλο παιχνίδι. Έστω  $L_1$  ο αριθμός των ηττών πριν την πρώτη νίκη και  $L_2$  ο αριθμός των ηττών μετά την πρώτη νίκη και πριν τη δεύτερη νίκη. Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών  $L_1$  και  $L_2$ .

5. Οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας.

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{αν } x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς  $c$ ;
- (β) Ποια είναι η  $P(Y < X)$ ;
- (γ) Ποια είναι η  $P(Y > X)$ ;
- (δ) Ποια είναι η  $P(Y = X)$ ;
- (ε) Ποια είναι η  $P(Y = 3)$ ;
- (στ) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας των  $X$  και  $Y$ .
- (ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές των  $X$  και  $Y$ .
- (η) Βρείτε τις διασπορές των  $X$  και  $Y$ .