ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΛΥΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Υποθέστε ότι ονομάζουμε τις τάξεις Α, Β και Γ. Η πιθανότητα ο Γιώργος και η Μαρία να βρίσκονται και οι δυο στην τάξη Α είναι ο αριθμός των πιθανών συνδιασμών για την τάξη Α που συμπεριλαμβάνουν τον Γιώργο και την Μαρία, δια το συνολικό αριθμό των συνδιασμών για την τάξη Α. Επομένως, η πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{88}{28}}{\binom{90}{30}}$$

Επομένως, εφόσον υπάρχουν τρεις τάξεις, η πιθανότητα ότι ο Γιώργος και η Μαρία θα καταλήξουν στην ίδια τάξη είναι:

$$3.\frac{\binom{88}{28}}{\binom{90}{30}}$$

Μια πιο απλή λύση θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη. Τοποθετούμε τον Γιώργο σε μια τάξη. Όσον αναφορά την Μαρία υπάρχουν 89 πιθανές "θέσεις", και μόνον 29 από αυτές την τοποθετούν στην ίδια τάξη με τον Γιώργο. Η απάντηση είναι $\frac{29}{30}$, η οποία συμφωνεί με την προηγούμενη λύση.

2. Μετράμε το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε με ασφάλεια τα 8 πιόνια πάνω στο σκάκι, και στην συνέχεια διαιρούμε αυτό το πλήθος με τον συνολική πιθανότητα. Αρχικά μετράμε το πλήθος των επιτρεπτών θέσεων τον πιονιών.θα τοποθετήσουμε τα πιόνια ενα -ενα πάνω στο σκάκι. Για το πρώτο πιόνι δεν υπάρχουν περιορισμοί, έτσι έχουμε 64 επιλογές. Η τοποθέτηση όμως του πιονιού στο σκάκι αφαιρεί μια γραμμή και μια στήλη.Ετσι στο δεύτερο πιόνι υποθέτουμε ότι η μη επιτρεπτή γραμμή και στήλη έχει αφαιρεθεί, και για αυτό το σκάκι μας θα αποτελείται πλέον απο χώρο $7x7$ και με 49 δυνατές επιλογές. Ομοίως δουλεύουμε για το τρίτο πιόνι όπου θα έχουμε 36 δυνατές επιλογές τοποθέτησης του, για το τέταρτο 25 κτλ.Στην απουσία οποιονδήποτε περιορισμών υπάρχουν $64 \cdot 63 \cdots 57 = 64!/56!$ τρόποι για να τοποθετήσουμε τα 8 πιόνια, επομένως η επιθυμητή πιθανότητα είναι:

$$\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4}{\frac{64!}{56!}}$$

3. Είναι φανερό ότι εαν $n > m$ ή $n > k$ ή $m - n > 100 - k$ η πιθανότητα πρέπει να είναι μηδενική. Εάν $n \leq m, n \leq k$ και $n - m \leq 100 - k$, τότε μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα να διαλέξουμε n

από τα 100 αμάξια για τέστ οδήγησης μετρώντας τον συνολικό αριθμό των μεγέθους m υποσυνόλων, και στη συνέχεια τον αριθμό των μεγέθους m υποσυνόλων τα οποία περιέχουν n βυσσινί αμάξια. Επομένως, υπάρχουν $\binom{100}{m}$ διαφορετικά υποσύνολα μεγέθους m. Για να μετρήσουμε το πλήθος των υποσυνόλων μεγέθους m με n βυσσινί αμάξια, διαλέγουμε αρχικά n βυσσινί από τα k διαθέσιμα βυσσινί αμάξια και μετά διαλέγουμε $m-n$ αμάξια από τα $100-k$ διαθέσιμα.Επομένως, το πλήθος των τρόπων για να διαλέξουμε ένα υποσύνολο μεγέθους m από τα $100-k$ αμάξια και να πάρουμε n βυσσινί είναι:

$$\binom{k}{n}\binom{100-k}{m-n},$$

και η επιθυμητή πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{k}{n}\binom{100-k}{m-n}}{\binom{100}{m}}$$

4.(α)Υπάρχουν $\binom{8}{4}$ τρόποι για να πάρει κάποιος 4 χαμηλού επιπέδου μαθήματα και $\binom{10}{3}$ τρόποι

για να επιλέξει 3 υψηλού επιπέδου μαθήματα, επομένουν υπάρχουν:

$$\binom{8}{4}\binom{10}{3}$$

επιτρεπτά προγράμματα σπουδών.

(β) Πρέπει να θεωρήσουμε μερικές διαφορετικές υποθέσεις:

(i)Έστω ότι δεν επιλέγουμε το L_1. Τότε και τα δύο L_2 και L_3 πρέπει να επιλεχτούν, αλλίως δεν επιτρέπεται να πάρουμε κάποιο μάθημα υψηλού επιπέδου.Επομένως, χρειάζεται να επιλέξουμε 2 επιπλέον μαθήματα χαμηλού επιπέδου απο τα 5 υπολοιπόμενα, και 3 υψηλού επιπέδου μαθήματα απο τα 5 διαθέσιμα. Επομένως μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{2}\binom{5}{3}$ επιτρεπτούς οδηγούς σπουδών.

(ii)Αν επιλέξουμε το L_1, αλλά ούτε το L_2 ούτε το L_3 έχουμε $\binom{5}{3}\binom{5}{3}$ δυνατές επιλογές.

(iii)Αν επιλέξουμε το L_1, και ένα από τα L_2 ή L_3 έχουμε $2\cdot\binom{5}{2}\binom{5}{3}$ επιλογές. Αυτό είναι επειδή υπάρχουν 2 τρόποι να επιλέξουμε μεταξύ του L_2 και L_3, $\binom{5}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε 2 χαμηλού επιπέδου μαθήματα από τα $L_4\cdots L_8$, και $\binom{5}{3}$ τρόποι ώστε να διλέξουμε 3 υψηλού επιπέδου μαθήματα απο τα $H_1,\cdots,H_5$.

(iv)Τέλος, αν διαλέξουμε τα L_1,L_2 και L_3, έχουμε $\binom{5}{1}\binom{10}{3}$ δυνατές επιλογές.

Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε διπλές μετρήσεις, επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη στις υποθέσεις που κάναμε.Επιπλέον έχουμε θεωρήσει κάθε δυνατή επιλογή. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει προσθέτοντας τις παραπάνω 4 υποθέσεις.

5. (α) Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Εφόσον όλα τα κοράκια είναι μαύρα, έχουμε ότι $P(B) = 1 - q$. Επιπλέον, $P(A) = p$.Τελικά, $P(B|A) = 1 - q = P(B)$, εφόσον η πιθανότητα να παρατηρήσουμε ένα (μαύρο) κοράκι δεν επηρεάζεται από την αλήθεια της υπόθεσης. Καταλήγουμε στο ότι $P(A|B) = P(A) = p$. Επιπλέον, τα νέα στοιχεία συγκρινόμενα με την υπόθεση ότι "όλες οι αγελάδες είναι άσπρες", δεν αλλάζουν αυτό που πιστεύουμε για την αλήθεια.

(β) Επιπλέον,

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}. \tag{1}$$

Δοθέντος του γεγονότος A, μια αγελάδα παρατηρήθηκε με πιθανότητα q, και πρέπει να είναι άσπρη.Έτσι, $P(C|A) = q$. Δοθέντος του γεγονότος A^c, μια αγελάδα παρατηρήθηκε με πιθανότητα q, και είναι άσπρη με πιθανότητα $1/2$. Έτσι, $P(C/A^c) = q/2$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα τις ολικής πιθανότητας έχουμε,

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(A^c)P(C|A^c) = pq + (1-p)\frac{q}{2}$$

Οπότε,

$$P(A|C) = \frac{pq}{pq + (1-p)\frac{q}{2}} = \frac{2p}{1+p} > p$$

Έτσι, η παρατήρηση μιας άσπρης αγελάδας κάνει την υπόθεση "όλες οι αγελάδες είναι άσπρες" περισσότερο πιθανό να είναι αληθινή.