

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Η παράδοση θα γίνει μέχρι την Πέμπτη 14/11/2013 στο διάλειμμα του μαθήματος, σε χαρτί.

1. Ενενήντα φοιτητές συμπεριλαμβανομένου του Γιώργου και της Μαρίας πρόκειται να χωριστούν σε 3 τάξεις ίσου μεγέθους. Η διαδικασία αυτή θα γίνει με τυχαίο τρόπο. Ποιά είναι η πιθανότητα ο Γιώργος και η Μαρία να βρίσκονται στην ίδια τάξη;

2. Οκτώ πιόνια τοποθετούνται σε ξεχωριστές θέσεις σε ένα σκάκι μεγέθους 8×8 . Όλες οι θέσεις του σκακιού έχουν την ίδια πιθανότητα τοποθέτησης του κάθε πιονιού. Βρείτε την πιθανότητα και τα 8 πιόνια να μην επικαλύπτουν το ένα από το άλλο, δηλαδή να μην υπάρχει γραμμή ή στήλη με περισσότερα από ένα πιόνια;

3. Ένας χώρος στάθμευσης έχει παρκαρισμένα 100 αυτοκίνητα. Τα k από αυτά είναι χρώματος βυσσινί. Διαλέγουμε τυχαία m αυτοκίνητα για οδηγικό τεστ. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι n από τα αμάξια που πήραμε για τεστ θα είναι χρώματος βυσσινί;

4. Σε ένα πανεπιστήμιο προσφέρονται 8 μαθήματα χαμηλού επιπέδου: $\{L_1, L_2, \dots, L_8\}$ και 10 μαθήματα υψηλού επιπέδου: $\{H_1, H_2, \dots, H_{10}\}$. Ένα έγκυρο πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από 4 μαθήματα χαμηλού επιπέδου και 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου.

(α) Πόσα είναι τα πιθανά διαφορετικά προγράμματα σπουδών;

(β) Υποθέστε ότι τα $\{H_1, H_2, \dots, H_5\}$ έχουν ως προαπαιτούμενο το L_1 , και τα $\{H_6, H_7, \dots, H_{10}\}$ έχουν ως προαπαιτούμενα τα L_2 και L_3 . Για παράδειγμα οποιοδήποτε πρόγραμμα σπουδών που περιέχει κάποιο από τα $\{H_1, H_2, \dots, H_5\}$ πρέπει επίσης να περιέχει το L_1 . Πόσα διαφορετικά προγράμματα σπουδών υπάρχουν;

5. Θεωρείστε μια έκφραση της οποίας η αλήθεια είναι άγνωστη. Αν δούμε πολλά παραδείγματα τα οποία είναι συμβατά με την έκφραση, τότε μπαίνουμε στον πειρασμό να θεωρήσουμε αυτή την εκδοχή της έκφρασης ως πιο πιθανό να είναι αληθινή. Αυτός ο ισχυρισμός συχνά αναφέρεται ως επαγωγική μέθοδος. Θεωρείστε τώρα την έκφραση “**1: όλες οι αγελάδες είναι άσπρες.**” Μια ισοδύναμη έκφραση είναι ότι “**2: ό,τι δεν είναι άσπρο, δεν είναι αγελάδα.**” Έπειτα παρατηρούμε πολλά μαύρα κοράκια. Οι παρατηρήσεις μας είναι προφανώς συμβατές με την ισοδύναμη έκφραση (2:) παραπάνω, αλλά κάνουν την υπόθεση (1:) πιο πιθανή;

Για να αναλύσουμε μια τέτοια κατάσταση, θεωρούμε ένα πιθανοτικό μοντέλο. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο δυνατές καταστάσεις, τις οποίες τις μοντελοποιούμε σε συμπληρωματικά γεγονότα:

A : όλες οι αγελάδες είναι άσπρες,
 A^c : 50% όλων των αγελάδων είναι άσπρες.

Έστω p η εκ των προτέρων πιθανότητα $P(A)$ ότι όλες οι αγελάδες είναι άσπρες. Παρατηρούμε μια αγελάδα ή ένα κοράκι, με πιθανότητα q και $1 - q$, αντίστοιχα, ανεξάρτητα από το αν συμβαίνει ή όχι το γεγονός A . Υποθέστε ότι $0 < p, q < 1$ και ότι όλα τα κοράκια είναι μαύρα.

- (α) Δεδομένου του γεγονότος $B = \{\text{ένα μαύρο κοράκι παρατηρήθηκε}\}$, ποιά η πιθανότητα $P(A|B)$;
- (β) Δεδομένου του γεγονότος $C = \{\text{μια άσπρη αγελάδα παρατηρήθηκε}\}$, ποιά η πιθανότητα $P(A|C)$;