

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διδάσκων: Π. Τραχανιάς

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

- (α) βροχή σήμερα: 0.3
- (β) βροχή αύριο: 0.5
- (γ) βροχή και σήμερα και αύριο: 0.2
- (δ) βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων.

Λύση

Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cup B$. Ένα από τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων είναι και το ακόλουθο:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δοθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A \cup B$ (μέρος (δ) της εκφώνησης).

2. Στη Λοταρία του ΟΠΑΠ, εξι αριθμοί προέρχονται από την αλληλουχία των αριθμών 1 έως 51. Ποιά η πιθανότητα ότι οι εξι αριθμοί που κληρώνονται θα έχουν: (α) όλοι ένα ψηφίο και (β) δυο να έχουν ένα ψηφίο και τέσσερις δυο ψηφία.

Λύση

$$(α) P(\text{"όλοι ένα ψηφίο"}) = \frac{\binom{9}{6} \binom{42}{0}}{\binom{51}{6}} = 5 \times 10^{-6}$$

$$(β) P(\text{"δυο να έχουν ένα ψηφίο και τέσσερις δυο ψηφία"}) = \frac{\binom{9}{2} \binom{42}{4}}{\binom{51}{6}} = 0.224$$

3. Το κουτί 1 περιέχει 1 άσπρη και 999 κόκκινες μπάλες. Το κουτί 2 περιέχει 1 κόκκινη και 999 άσπρες μπάλες. Μια μπάλα επιλέγεται από ένα τυχαίο κουτί. Αν η μπάλα είναι κόκκινη ποιά η πιθανότητα να προέρχεται απ' το κουτι ένα;

Λύση

B_1 : μπάλες στο κουτί 1
 B_2 : μπάλες στο κουτί 2
 R : κόκκινες μπάλες

Από υπόθεση έχουμε :

$$P(B_1) = P(B_2) = 0.5$$

$$P(R|B_1) = 0.999$$

$$P(R|B_2) = 0.001$$

Από θεώρημα *Bayes* έχουμε :

$$P(B_1|R) = \frac{P(R|B_1)P(B_1)}{P(R|B_1)P(B_1)+P(R|B_2)P(B_2)} = \frac{0.999}{0.999+0.001} = 0.999$$

4. Το κουτί 1 περιέχει Α άσπρες μπάλες και Β μαύρες μπάλες. Το κουτί 2 περιέχει Γ άσπρες και Δ μαύρες μπάλες. Μια μπάλα αγνώστου χρώματος μεταφέρεται από το πρώτο κουτί στο δεύτερο και έπειτα παίρνουμε μια μπάλα απ' το δεύτερο κουτί. Ποιά η πιθανότητα η μπάλα που πήραμε να είναι άσπρη;

Λύση

Αν καμιά μπάλα δε μεταφερθεί απ το πρώτο κουτί στο δεύτερο, η πιθανότητα να πάρουμε μια άσπρη μπάλα απ το δεύτερο είναι $\Gamma/(\Gamma+\Delta)$. Στην περίπτωση μας μια μπάλα πρώτα μεταφέρεται απ το κουτί 1 στο κουτί 2 και υπάρχουν μόνο δύο αμοιβαία αποκλειόμενες πιθανότητες γι' αυτό το γεγονός: η μπάλα που μεταφέρθηκε να είναι είτε άσπρη είτε μαύρη. Έστω:

W = η μπάλα που μεταφέρθηκε είναι άσπρη

K = η μπάλα που μεταφέρθηκε είναι μαύρη και

T = η μπάλα που πήραμε είναι άσπρη

$$P(W) = \frac{A}{A+B} \text{ και} \\ P(K) = \frac{B}{A+B}$$

Το γεγονός T μπορεί να συμβεί μόνο στις δύο αλληλοαποκλειόμενες περιπτώσεις που αναφέραμε παραπάνω. Οπότε

$$\begin{aligned} P(T) &= PT \cap (W \cup K) = P(T \cap W) \cup (T \cap K) \\ &= P(T \cap W) + P(T \cap K) \\ &= P(T|W)P(W) + P(T|K)P(K) \end{aligned}$$

Αλλά

$$P(T|W) = \frac{\Gamma+1}{\Gamma+\Delta+1} \\ P(T|K) = \frac{\Gamma}{\Gamma+\Delta+1}$$

Οπότε

$$P(T) = \frac{A(\Gamma+1)}{(A+B)(\Gamma+\Delta+1)} + \frac{B\Gamma}{(A+B)(\Gamma+\Delta+1)} = \frac{A\Gamma+B\Gamma+A}{(A+B)(\Gamma+\Delta+1)}$$