

Άσκηση 1.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{\text{το εξάρτημα χαλάει κατά τη } M\text{-στή ώρα λειτουργίας του}\},$

$EA = \{\text{το εξάρτημα κατασκευάζεται από την εταιρεία } EA\},$

$EB = \{\text{το εξάρτημα κατασκευάζεται από την εταιρεία } EB\}.$

Έχουμε ότι $P(EA) = \frac{1}{3}$ και $P(EB) = \frac{2}{3}$. Επίσης, $P(A|EA) = p_1(M)$ και $P(A|EB) = p_2(M)$.

(α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας (ΘΟΠ), έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(EA) \cdot P(A|EA) + P(EB) \cdot P(A|EB) \\ P(A) &= \frac{1}{3}p_1(M) + \frac{2}{3}p_2(M). \end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes.

$$P(EA|A) = \frac{P(EA) \cdot P(A|EA)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}p_1(M)}{\frac{1}{3}p_1(M) + \frac{2}{3}p_2(M)}.$$

(γ) Ορίζουμε τώρα το γεγονός $C = \{\text{το εξάρτημα εξακολουθεί να λειτουργεί στο τέλος της } M\text{-στής ώρας}\}$. Αυτό σημαίνει ότι χαλάει κάποια στιγμή μετά την M -στή ώρα, δηλαδή στην $(M+1)$ -στη, $(M+2)$ -στη, ...

Συνεπώς: $P(C|EA) = \sum_{n=M+1}^{\infty} p_1(n)$ και $P(C|EB) = \sum_{n=M+1}^{\infty} p_2(n)$. Εφαρμόζοντας πάλι το ΘΟΠ, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(EA) \cdot P(C|EA) + P(EB) \cdot P(C|EB) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_1(n) + \frac{2}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_2(n). \end{aligned}$$

Ο κανόνας του Bayes δίνει:

$$\begin{aligned} P(EA|C) &= \frac{P(EA) \cdot P(C|EA)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_1(n)}{\frac{1}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_1(n) + \frac{2}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_2(n)}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

(α) Από την εκφώνηση, αναγνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 6$ και $p = 2/3$: $X \sim \Delta(n = 6, p = 2/3)$. Η σ.π. είναι:

$$P_X(k) = \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}; \quad k = 0, 1, \dots, 6.$$

(β) $E[X] = np = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ βαγόνια.

(γ) $P(\{\text{δεν υπάρχει συρμός}\}) = P(X = 0) = p_X(0) = \binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6$
 $P(\{\text{δεν υπάρχει συρμός}\}) = \frac{1}{729} = 0.001372.$

(6) Προφανώς το A συμβαίνει όταν $Y \leq 50X$. Καθώς η X παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 η $50X$ παίρνει τις τιμές 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300. Η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές 101, 102, ..., 200.

Παρατηρούμε τα εξής:

- (i) Όταν ο συρμός έχει $X = 4, 5$, ή 6 βαγόνια είναι πάντα $Y \leq 50X$ και όλοι οι ταξιδιώτες εξυπηρετούνται.
- (ii) Όταν ο συρμός έχει $X = 0, 1$, ή 2 βαγόνια $Y > 50X$ και δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν *όλοι* οι ταξιδιώτες.
- (iii) Όταν ο συρμός έχει $X = 3$ βαγόνια με χωρητικότητα $50X = 150$ επιβατών, τότε εξυπηρετούνται όλοι όταν $101 \leq Y \leq 150$.

Συνεπώς, από τα (i),(ii),(iii) έχουμε ότι:

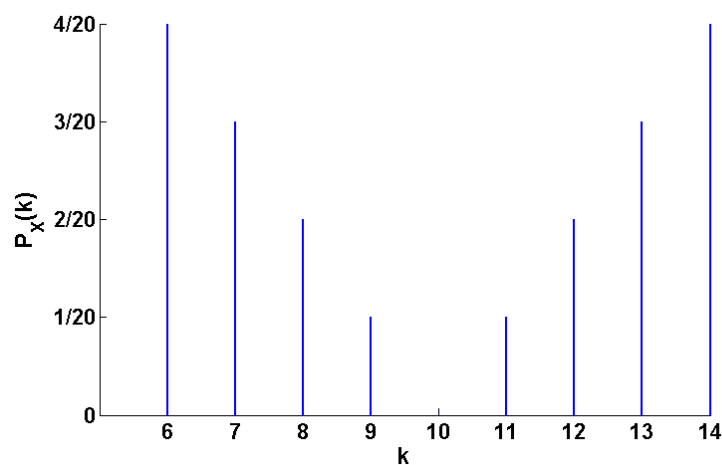
$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(X = 3) \cdot P(101 \leq Y \leq 150) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\
 &= p_X(3) \cdot \sum_{i=101}^{150} \frac{1}{100} + p_X(4) + p_X(5) + p_X(6) \\
 &= \binom{6}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{6}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{6}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\
 &= \dots = 0.68.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α) Για να είναι η $p_X(k)$ μια έγκυρη σ.π. πρέπει $\sum_{k=10-b}^{10+b} p_X(k) = 1$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=10-b}^{10+b} \frac{1}{20} |k - 10| &= 2 \cdot \sum_{k=11}^{10+b} \frac{1}{20} (k - 10) \quad [\text{λόγω συμμετρίας της } p_X(k) \text{ γύρω από το } k = 10] \\
 &= 2 \cdot \sum_{m=1}^b \frac{1}{20} m = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^b m \quad [m = k - 10] \\
 &= \frac{1}{10} \frac{b(b+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{20} = 1 \Rightarrow b = 4.
 \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $p_X(k)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της σ.π. για το υποερώτημα 3(α).

$$p_X(k) = \begin{cases} 0, & k = 10 \\ 1/20, & k = 9 \text{ ή } 11 \\ 2/20, & k = 8 \text{ ή } 12 \\ 3/20, & k = 7 \text{ ή } 13 \\ 4/20, & k = 6 \text{ ή } 14 \end{cases}$$

(β) Προφανώς λόγω συμμετρίας της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$, $E[X] = 10$. Επίσης $E[X^2] = \sum_k k^2 p_X(k) = 10^2 \cdot 0 + (9^2 + 11^2) \cdot \frac{1}{20} + (8^2 + 12^2) \cdot \frac{2}{20} + (7^2 + 13^2) \cdot \frac{3}{20} + (6^2 + 14^2) \cdot \frac{4}{20} = 110$.
 $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 110 - 10^2 = 10$.

(γ)

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[10(25 - X)^2] \\ &= E[6250 - 500X + 10X^2] \\ &= 6250 - 500E[X] + 10E[X^2] \\ &= 6250 - 500 \cdot 10 + 10 \cdot 110 = 2350 \text{ €}. \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 12 | 10 \leq X \leq 15) &= \frac{P(10 \leq X \leq 12 \cap 10 \leq X \leq 15)}{P(10 \leq X \leq 15)} \\ &= \frac{P(10 \leq X \leq 12)}{P(10 \leq X \leq 15)} \\ &= \frac{0 + 1/20 + 2/20}{0 + 1/20 + 2/20 + 3/20 + 4/20 + 0} \\ &= \frac{3/20}{10/20} = 0.3. \end{aligned}$$

(ε) Από τη συμμετρία της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$ έχουμε ότι $P(A) = 0.5$. Συνεπώς $P(A^c) = 0.5$. Επίσης $P(B^c) = 0.7$. Τα A και B είναι ανεξάρτητα, συνεπώς και τα A^c και B^c είναι ανεξάρτητα. Τελικά $P(A^c B^c) = P(A^c)P(B^c) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$.

Άσκηση 4.

(α) Δεδομένου ότι φέρνουμε $X = x$ στη ρίψη του 6-εδροτυ δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα x φορές και το πλήθος Y των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = x$ και $p = \frac{1}{2} : Y_{\{X=x\}} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$.

Συνεπώς,

$$P_{Y|X}(y|x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq x.$$

(β) $P(Y = 3 | X = 6) = P_{Y|X}(y = 3 | x = 6) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = 0.3125$.

(γ) Προφανώς, η X είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ) Η από κοινού σ.π. των X και Y είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \\ &= \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}P(X = Y) &= \sum_{i=1}^6 p_{X,Y}(i, i) \\&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \binom{i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\&= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] = 0.164.\end{aligned}$$