

ΗΥ-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έβδομη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/12/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 7/1/2013

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (II).

Άσκηση 1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

A_t : Το κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί κατά τη χρονική στιγμή t .

B : Το κύκλωμα είναι "κακό".

G : Το κύκλωμα είναι "καλό".

Κάνοντας χρήση των εκθετικών κατανομών,

$$P(A_t|G) = \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha t}$$
$$P(A_t|B) = \int_t^\infty 1000\alpha e^{-1000\alpha x} dx = e^{-1000\alpha t}.$$

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$P(A_t) = P(G)P(A_t|G) + P(B)P(A_t|B) = pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}.$$

(β) Μας ζητείται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X . Από το υποερώτημα (α), έχουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(A_x) = 1 - pe^{-\alpha x} - (1-p)e^{-1000\alpha x}.$$

Επομένως:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1-p)1000\alpha e^{-1000\alpha x}.$$

(γ) Κάνοντας χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(B|A_t) = \frac{P(B \cap A_t)}{P(A_t)}.$$

Επιπλέον, $P(B \cap A_t) = P(B)P(A_t|B) = (1-p)e^{-1000\alpha t}$. Επομένως,

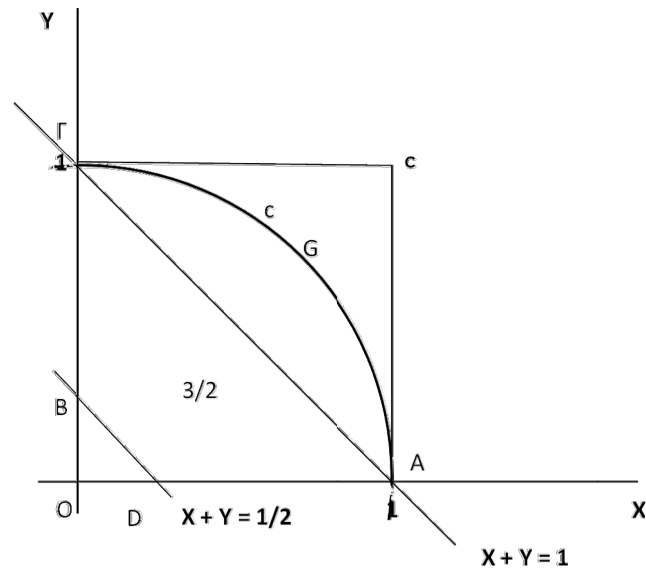
$$P(B|A_t) = \frac{(1-p)e^{-1000\alpha t}}{pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}} = \frac{1}{(p/(1-p))e^{999\alpha t} + 1}.$$

Προκειμένου να ισχύει $P(B|A_t) < 0.01$ όταν $p/(1-p) = 9$, πρέπει να ισχύσει $e^{999\alpha t} > 11$, το οποίο δίνει $t > (\ln 11)/(999\alpha)$.

Άσκηση 2.

(α) Οι τ.μ. X και Y παίρνουν τιμές στο τετράγωνο του Σχήματος 1. Η από κοινού σ.π.π. των X και Y παίρνει την τιμή $3/2$ στο τρίγωνο OAG και την τιμή c στο τρίγωνο AGC . Από τη σχέση κανονικοποίησης προκύπτει ότι:

$$\frac{3}{2}E_{OAG} + cE_{AGC} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} = 0.5$$



Σχήμα 1: Πεδίο τιμών των τ.μ. X και Y της Άσκησης 2.

(β) Η τ.μ. Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1)$. Έχουμε ότι για κάθε $y \in [0, 1)$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{1-y} \frac{3}{2}dx + \int_{1-y}^1 \frac{1}{2}dx \\ &= \frac{3}{2}x \Big|_0^{1-y} + \frac{1}{2}x \Big|_{1-y}^1 = \frac{3(1-y) + 1 - (1-y)}{2} = \frac{3}{2} - y \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3/2 - y, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(γ) P(X + Y \leq 1/2) = \frac{3}{2}E_{OBD} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(X^2 + Y^2 \geq 1) &= 1 - (X^2 + Y^2 < 1) \\ &= 1 - \frac{3}{2}E_{OAG} - \frac{1}{2}E_{AGC} \\ &= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \\ &= 1 - \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 0.108. \end{aligned}$$

Άσκηση 3. (α) Το πεδίο ορισμού της f_X είναι το διάστημα $[-1, 1]$. Για $-1 \leq x \leq 1$,

$$f_X(x) = \int_{-1}^1 \frac{xy+1}{C} dy = \left(\frac{xy^2}{2C} + \frac{y}{C} \right) \Big|_{y=-1}^{y=1} = \frac{2}{C}$$

Συνεπώς,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{C} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

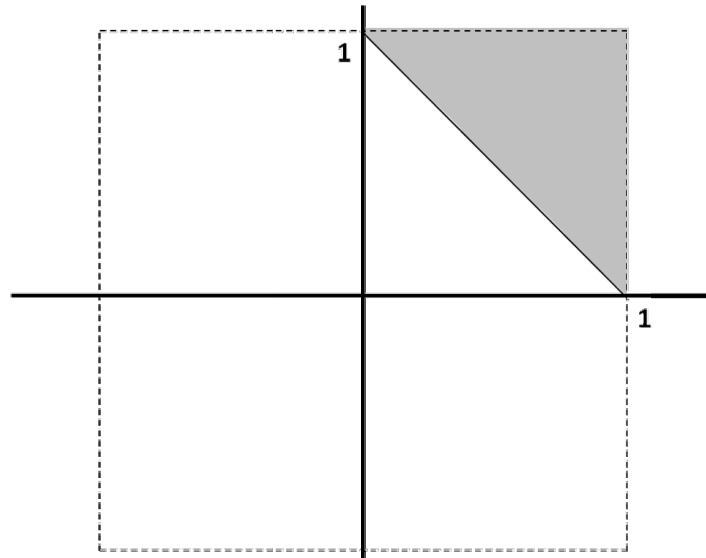
οπότε η X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-1, 1]$.

(β) Προφανώς, το $C = 4$ ώστε η $\sigma.\pi.\pi.$ του (α) να ολοκληρώνεται στο 1.

(γ)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{\frac{xy+1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{xy+1}{2} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ) Θα πρέπει να βρούμε το ολοκλήρωμα στη σκιασμένη περιοχή στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το γεγονός $\{X + Y \geq 1\}$ για την Άσκηση 3.

$$\begin{aligned} P\{X + Y \geq 1\} &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \frac{xy+1}{4} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{8} + \frac{y}{4} \right) \Big|_{y=1-x}^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x^2 - x^3 + 2x}{8} dx = \frac{17}{96} = 0.1771. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. (α) Οι X και Y είναι ανεξάρτητες και η Y είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda = 2$. Συνεπώς, $f_Y(y) = 2e^{-2y}$ για $y > 0$.

(β) Οι X και Y είναι ανεξάρτητες, άρα η από κοινού $\sigma.\pi.\pi.$ ισούται με το γινόμενο των περιθωριακών. Δηλαδή,

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-2y} \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } y > 0.$$

Συνεπώς,

$$P(Y \geq X) = \int_0^1 \int_x^\infty 2e^{-2y} dy dx = \frac{1 - e^{-2}}{2}.$$

Άσκηση 5. Για $y > 0$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq y\right\} = P\left\{\frac{1}{y} \leq X, X > 0\right\} + P\left\{\frac{1}{y} \geq X, X < 0\right\} \\ &= P\left\{\frac{1}{y} \leq X\right\} + P\{X < 0\} = 1 - P\left\{\frac{1}{y} \geq X\right\} + P\{X < 0\} = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) + F_X(0). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = -\frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \frac{1}{\pi(1 + (\frac{1}{y})^2)} = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}.$$

Για $y < 0$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq y\right\} = P\left\{\frac{1}{y} \geq X, X > 0\right\} + P\left\{\frac{1}{y} \leq X, X < 0\right\} \\ &= 0 + P\left\{\frac{1}{y} \leq X < 0\right\} = F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = -\frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \frac{1}{\pi(1 + (\frac{1}{y})^2)} = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}.$$

Συνεπώς, η τ.μ. Y ακολουθεί επίσης κατανομή Cauchy!

Άσκηση 6.

(α) Χρησιμοποιώντας τη βοήθεια:

$$E[X] = \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^\infty x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.253,$$

καθώς $\int_{-\infty}^\infty x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ είναι το ολοκλήρωμα υπολογισμού της διασποράς της τυπικής Γκαουσιανής τ.μ. που ισούται με τη μονάδα.

(β) Αρχικά υπολογίζουμε τη α.σ.κ. της Z ως:

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\max(X, Y) \leq z\} = P(X \leq z, Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z) = (1 - e^{-\frac{z^2}{2}})^2$$

για $z \geq 0$, και $F_Z(z) = 0$ για $z < 0$. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f_Z(z) = 2(1 - e^{-\frac{z^2}{2}})e^{-\frac{z^2}{2}}z = 2ze^{-\frac{z^2}{2}} - 2ze^{-z^2}$$

για $z \geq 0$, και $f_Z(z) = 0$ για $z < 0$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η f_Z ολοκληρώνεται στο 1.

(γ) Χρησιμοποιώντας τη τεχνική του (α) ερωτήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^\infty 2z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_0^\infty 2z^2 e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^\infty z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^\infty z^2 e^{-z^2} dz \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^\infty z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^\infty z^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \sqrt{2\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 1.62. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $E[Z] > E[X]$ όπως ήταν αναμενόμενο.