

HY-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έβδομη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/12/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 7/1/2013

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (II).

Άσκηση 1. Ένα κύκλωμα υπολογιστή έχει διάρκεια ζωής η οποία αποτελεί μία συνεχή τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι ένα εργοστάσιο παράγει ένα μείγμα "καλών" και "κακών" κυκλωμάτων. Για κάποια θετική σταθερά α , η διάρκεια ζωής των καλών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο α ενώ η διάρκεια ζωής των κακών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο 1000α . Έστω ότι το ποσοστό των καλών κυκλωμάτων είναι p και ότι το ποσοστό των κακών κυκλωμάτων είναι $1 - p$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί μετά από t μονάδες χρόνου.

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος.

(γ) Για να γίνει διαλογή των καλών κυκλωμάτων, κάθε κύκλωμα δοκιμάζεται για t μονάδες χρόνου και μόνο εκείνα τα οποία δεν χαλάνε κατά τη δοκιμή αποστέλλονται στους πελάτες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας πελάτης λαμβάνει ένα "κακό" κύκλωμα ως συνάρτηση των παραμέτρων α , p , και t . Αν $p = 0.9$, πόσο πρέπει να διαρκεί η δοκιμή (δηλαδή, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το t) ώστε η πιθανότητα να στέλνονται κακά κυκλώματα στους πελάτες να είναι μικρότερη από 1%;

Άσκηση 2. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.π.π.$):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1.5 & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1, \quad 0 \leq x+y < 1, \\ c & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1, \quad 1 \leq x+y < 2, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού $\sigma.π.π.$ και υπολογίστε τη σταθερά c .

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή $\sigma.π.π.$ της τ.μ. Y .

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y \leq 1/2)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$.

Άσκηση 3. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού $\sigma.π.π.$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{C} & -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την περιθωριακή $\sigma.π.π.$ της τ.μ. X .

(β) Υπολογίστε τη σταθερά C .

(γ) Υπολογίστε την δεσμευμένη $\sigma.π.π.$ της τ.μ. Y δεδομένης της X , $f_{Y|X}(y|x)$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y \geq 1)$.

Άσκηση 4. Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y , όπου η X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$ ενώ η Y είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda = 2$.

- (α) Ποια είναι η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. Y ;
 (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y > X)$.

Άσκηση 5. Λέμε ότι η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί κατανομή Cauchy όταν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < \infty$$

Ορίζουμε την τ.μ. $Y = \frac{1}{X}$.

- (α) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, της Y .
 (β) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y . Τι κατανομή έχει η Y ;

Άσκηση 6. Η ισχύς του σήματος ενός κινητού τηλεφώνου όπως λαμβάνεται σε ένα σταθμό βάσης (base station) σε ένα πυκνό αστικό περιβάλλον μπορεί να μοντελοποιηθεί από μία τ.μ. Rayleigh. Όταν ο χρήστης απέχει περίπου το ίδιο από δύο σταθμούς βάσης, το σύστημα χρησιμοποιεί τη λεγόμενη τεχνική *διαφορικής λήψης* (selection diversity), σύμφωνα με την οποία επιλέγεται ο σταθμός βάσης με τη μεγαλύτερη ισχύ λήψης σήματος για να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του χρήστη. Έστω X και Y δύο τ.μ. που μοντελοποιούν την ισχύ του σήματος όπως λαμβάνεται στους δύο σταθμούς βάσης. Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν την ίδια κατανομή Rayleigh:

$$f_X(u) = f_Y(u) = \begin{cases} ue^{-\frac{u^2}{2}} & u \geq 0, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε τη μέση τιμή της ισχύος του σήματος σε κάθε σταθμό βάσης, $E[X]$.

Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε την ανάλυση για τον υπολογισμό της διασποράς της τυπικής Γκαουσιανής τ.μ.

- (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ισχύος του σήματος που επιλέγεται από το μηχανισμό του selection diversity. Με άλλα λόγια υπολογίστε την κατανομή της τ.μ. $Z = \max(X, Y)$.

- (γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z . Πως συγκρίνεται αυτή με τη μέση τιμή των X και Y ; Ποσοτικοποιήστε το πλεονέκτημα του μηχανισμού του selection diversity όσον αφορά τη μέση λαμβανόμενη ισχύ.