

HY-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις: Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/12/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/12/2012

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Άσκηση 1. Αυτή η άσκηση ήταν το 1ο θέμα της Τελικής Εξέτασης του Ιανουαρίου 2009. Δείτε την λύση στη σελίδα http://www.csd.uoc.gr/~hy217/HW2008/final_Jan2009_sol.pdf

Άσκηση 2. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που ζητάμε, δηλαδή ο αριθμός των χρόνων φυλάκισης ενός κατηγορουμένου. Τότε $f_X(x) = 0.5f_1(x) + 0.5f_2(x)$, όπου:

$$f_1(x) \begin{cases} 1 & , x \in [1, 2] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η σ.π.π. για τις ποινές του πρώτου δικαστή και

$$f_2(x) \begin{cases} 1/3 & , x \in [0, 3] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η σ.π.π. για τις ποινές του δεύτερου δικαστή. Παρατηρήστε ότι η τιμές της $f_X(x)$ στα σημεία $\{0, 1, 2, 3\}$ δεν έχουν σημασία, αφού αλλάζοντας τιμή της σ.π.π. σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δεν επηρεάζεται η κατανομή πιθανοτήτων. Ομοίως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι γραμμική συνάρτηση:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x/6 & , x \in [0, 1] \\ 1/6 + (2/3)(x-1) & , x \in [1, 2] \\ 5/6 + (1/6)(x-2) & , x \in [2, 3] \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

Εφόσον το γράφημα της $f_X(x)$ είναι συμμετρικό σε σχέση με τον άξονα $x = 3/2$, τότε $E[X] = 3/2$. Τέλος, εφόσον:

$$E[X^2] = \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 dx + \frac{3}{2} \int_1^2 x^2 dx + \frac{1}{6} \int_2^3 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

τότε:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{12}.$$

Άσκηση 3. Ισχύει το εξής: $X \sim N(500, 25) \Rightarrow Z = \frac{X - 500}{5} \sim N(0, 1)$

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X \geq 490) &= P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) \\ &= 1 - \Phi(-2) = 0.9772 \end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι:

$$P(1 \text{ από τα } 3 \text{ πακέτα έχει βάρος } \geq 490) = \binom{3}{1} (0.9772)^1 (1 - 0.9772)^2 = \underline{0.001524}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490 - 500}{5} \leq \frac{X - 500}{5} \leq \frac{505 - 500}{5}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \\ &= 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι:

$$P(\text{και τα } 3 \text{ πακέτα είναι μεταξύ } 490 \text{ και } 505 \text{ gr}) = (0.8185)^3 = \underline{0.54837}$$

Άσκηση 3. Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε περιόδου, $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε $X_i \sim N(1.5, 6)$ και οι X_i είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τ.μ.

(α)

$$P(\alpha) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right)$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(4 \times 1.5, 4 \times 6) \equiv N(6, 24)$$

Συνεπώς,

$$P(\alpha) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{0 - 6}{\sqrt{24}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = 0.8897$$

(β)

$$P(\beta) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 + X_2 = -5\right) = P(-5 + X_3 + X_4 > 0) = P(X_3 + X_4 > 5)$$

Αλλά $X_3 + X_4 \sim N(3, 12)$, συνεπώς:

$$P(\beta) = P\left(\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > \frac{5 - 3}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) = 0.2818$$

(γ)

$$P(\gamma) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 = 5\right) = P(5 + X_2 + X_3 + X_4 > 0) = P(X_2 + X_3 + X_4 > -5)$$

Αλλά $X_2 + X_3 + X_4 \sim N(4.5, 18)$, οπότε:

$$P(\gamma) = P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} > \frac{-5 - 4.5}{\sqrt{18}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-9.5}{\sqrt{18}}\right) = \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{18}}\right) = 0.9874$$