

ΗΥ-217: Πιθανότητες -Χειμερινό Εξάμηνο 2012
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/12/2012

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/12/2012

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Άσκηση 1. Μία συνεχής τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1 - 0.1|x|), & |x| \leq 10, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a είναι μία σταθερά.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $f_X(x)$ και υπολογίστε την τιμή της σταθεράς a .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, σ_X^2 , της X .

(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X και δώστε τη γραφική παράσταση της.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| \leq 3)$.

Άσκηση 2. Ένα δικαστήριο έχει δύο δικαστές. Ο πρώτος καταδικάζει τον κατηγοούμενο σε X χρόνια φυλάκιση, όπου X είναι συνεχής ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[1, 2]$. Ο δεύτερος δικαστής καταδικάζει τον κατηγοούμενο σε Y χρόνια φυλάκιση, όπου Y είναι επίσης συνεχής ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[0, 3]$. Η ρίψη ενός δίκαιου κέρματος καθορίζει ποιος από τους δύο δικαστές θα δικάσει τον κατηγορούμενο. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, αθροιστική συνάρτηση κατανομής, μέση τιμή και διασπορά των χρόνων φυλάκισης του κατηγορουμένου.

Άσκηση 3. Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα 500 gr. είναι τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 gr. Ποια είναι η πιθανότητα:

(α) ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 gr καφέ;

(β) το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 gr;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Άσκηση 4. Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των ΗΠΑ προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα είναι μία κανονική τ.μ. με μέση τιμή 1.5 και διασπορά 6. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- (α) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα;
- (β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους;
- (γ) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου προηγείται με 5 πόντους;